现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森 左红亮 李海英 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

责任编辑 顾素萍
责任校对 刘 欣
版式设计 詹锦玲
封面设计 罗 π



ISBN 978-7-307-07205-3
定价: 26.00元

现代数学
专著系列

正算子理论

杨长森　左红亮　李海英　著

本书得到下列基金资助:

河南师范大学专著基金
河南省基础数学重点学科基金
河南省高校青年骨干教师资助计划
教育部科学技术研究重点项目基金
国家天元青年科学基金



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

正算子理论/杨长森,左红亮,李海英著．—武汉:武汉大学出版社,2009.8

现代数学专著系列

ISBN 978-7-307-07205-3

Ⅰ.正…　Ⅱ.①杨…　②左…　③李…　Ⅲ.正规算子　Ⅳ.O177.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第133371号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:720×1000　1/16　印张:13　字数:215千字　插页:1

版次:2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷

ISBN 978-7-307-07205-3/O·406　定价:26.00元

内容提要

Hilbert 空间上正算子理论是线性代数中正定矩阵理论向无穷维情形的推广. 本书介绍利用算子极分解理论研究 Hilbert 空间上正算子的若干性质, 如不等式的保序性、算子函数的单调性和若干新的算子类等方面的知识和方法. 全书共分五章: 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式, 并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性, 并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式等中的应用, 并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数研究 $F(p,r,q)$, $wF(p,r,q)$, $A(s,t)$ 等算子类, 指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 本书可作为基础数学专业泛函分析方向的研究生教材或参考书, 也可供有关专业的教师和科研工作者参考.

前　言

正定矩阵在矩阵理论中有着重要的地位，正定矩阵向无穷维空间的推广就产生了正算子，像正定矩阵一样正算子有着极其丰富的性质. 早在 1934 年， Löwner-Heinz 证明了如下著名的不等式：若 $A \geq B \geq 0$，则对任意实数 $\alpha \in [0,1]$，有 $A^{\alpha} \geq B^{\alpha}$. 到 1985 年， Chan-Kwong 在 [12] 中猜想 $A \geq B \geq 0$ 蕴含 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}} \leq A^2$. T. Furuta 在 1987 年证明了这个猜想是正确的，得到了一个比 Löwner-Heinz 不等式更广泛的不等式，后来称之为 Furuta 不等式. 该不等式出现后，引起许多学者的关注和研究. 例如 Furuta 等先后给出了该不等式的简化证明，以及其所诱导的算子单调函数和它在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、Kantorovich 型不等式、算子类等中的应用； K. Tanahashi 等研究了该不等式条件的最优性，并研究了具有负指数的 Furuta 型不等式. 本书介绍这方面的基本理论和最近作者获得的一些结果，鉴于篇幅有限，有些结果没有列出.

全书共分五章. 第一章介绍部分等距和极分解等预备知识. 第二章介绍 L-H 不等式、Furuta 不等式及 Furuta 型不等式，并研究具有负幂的 Furuta 型不等式的推广. 第三章介绍 L-H 不等式和 Furuta 不等式条件的最优性，并研究 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间. 第四章介绍 Furuta 不等式在 Ando 定理、算子方程、算子广义相对熵、 Kantorovich 型不等式等中的应用，并研究若干算子保序不等式. 第五章利用 Furuta 不等式和算子单调函数来研究 $F(p,r,q)$, $wF(p,r,q)$, $A(s,t)$ 等算子类，指出这些类与其中参数的依赖性、它的谱性质和其中算子幂的性质等. 为了方便读者，在附录中给出了常用的名词索引.

本书主要内容是由著者论文整理而成的，著者感谢导师李国平院士，是他引导著者对 Hilbert 空间上算子理论产生了浓厚的兴趣；感谢日

本东京科技大学的 T. Furuta 教授，他给著者提供了许多资料，多年来他给予我们许多关怀和培养；最后感谢武汉大学刘培德教授的关心、鼓励与帮助，并推荐该书在武汉大学出版社出版. 在本书的写作过程中，还得到许多研究生的帮助，在此也表示感谢. 由于著者水平有限，难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正！

著 者

河南师范大学数学与信息科学学院

目　录

第一章　预备知识

1.1　正常算子与自伴算子的简单性质

设 H 是 Hilbert 空间， $L(H)$ 是 H 上有界线性算子的全体构成的 Banach 代数. 以 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \le 1\}$ 为 $T \in L(H)$ 的范数；以 Φ 代表 H 所取的标量域，即实数域与复数域；以 $R(T), N(T)$ 分别代表 T 的值空间与零空间.

定义 1　设 $T \in L(H)$. 若存在 $B \in L(H)$ 使得

$$(Tx, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H,$$

则称 B 是 T 的 **共轭算子**, 记为 T^*.

如果 $T^*T = TT^*$, 则称 T 是 **正常算子** 或 **正规算子**. 特别地，若 $T = T^*$, 则称 T 为 **自伴算子**.

为了说明对任意的有界线性算子 T, 其共轭算子都是存在的，我们要从 Riesz 表现定理谈起.

定理 1.1.1 (Riesz 表现定理)　设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 对于每个 $y \in H$, $f(x) = (x, y)$ 是 H 上的连续线性泛函，且

$$\|f\| = \|y\|.$$

(2) 若 f 是 H 上的连续线性泛函，则存在 $y \in H$ ，使得

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in H,$$

此时称 y 为 f 的 **表现**.

证　(1) 显见， f 是线性泛函且

$$|f(x)| = |(x, y)| \le \|x\|\|y\|,$$

故 f 有界且 $\|f\| \le \|y\|$. 另一方面，由 $f(y) = (y,y) = \|y\|^2$, 得

$$\|f\| \ge \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \|y\|.$$

从而必有 $\|f\| = \|y\|$.

(2) 如果 f 是 H 上的连续线性泛函，令 $E = N(f)$, 则 E 闭. 若 $E = H$, 则 $f = 0$, 此时取 $y = 0$ 即可. 如果 $E \ne H$, $H = E \oplus E^{\perp}$, 先取 $z \in E^{\perp}$ 且 $\|z\| = 1$, 则 $f(z) \ne 0$. 令 $y = \overline{f(z)}z$, 对每个 $x \in H$, 显见 $x - \dfrac{f(x)}{f(z)}z \in E$, 故

$$0 = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y\right) = (x,y) - \frac{f(x)}{f(z)}\left(z, \overline{f(z)}z\right) = (x,y) - f(x),$$

即 $\forall x \in H$, $f(x) = (x,y)$, 且由 (1) 知 $\|f\| = \|y\|$.

定义 2 若

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha} S(f_1) + \overline{\beta} S(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*,\ \alpha, \beta \in \Phi,$$

则称映射 $S : H^* \to H$ 是**共轭线性的**. 若 $T : H^* \to H$ $(Tf = y)$, 其中 y 是 f 的表现，由 Riesz 表现定理可知， T 是共轭线性满射，且

$$\|Tf\| = \|f\|, \quad \forall f \in H^*.$$

定理 1.1.2 设 H 为 Hilbert 空间，则对每个 $A \in L(H)$，存在唯一的 $B \in L(H)$，使得

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H.$$

证 对任意的 $x, y \in H$, 令 $\varphi(x,y) = (x, Ay)$. 固定 $x \in H$, 令

$$f_x(y) = \overline{\varphi(x,y)}.$$

下证 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 事实上，对任意的 $z, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned} f_x(\alpha y + \beta z) &= \overline{\varphi(x, \alpha y + \beta z)} = \overline{\left(x, A(\alpha y + \beta z)\right)} \\ &= \alpha f_x(y) + \beta f_x(z), \end{aligned}$$

且

$$|f_x(y)| = |\overline{\varphi(x,y)}| = |(x, Ay)| \le \|A\| \|x\| \|y\|,$$

故 f_x 是 H 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理可知, 存在唯一的 z_x 使得 $f_x(y)=(y,z_x)$. 设 $B:x\to z_x$, 则容易验证 B 是 $H\to H$ 上的线性算子, 并且对任意的 $x,y\in H$ 有

$$(Bx,y)=(z_x,y)=\overline{(y,z_x)}=\overline{f_x(y)}=\varphi(x,y)=(x,Ay),$$

且 B 是有界的. 事实上, 当 $Bx\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\|Bx\| &= \left(B\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\|x\| = \left(\frac{x}{\|x\|},A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\right)\|x\|\\ &\le \|A\|\|x\|.\end{aligned}$$

因此, $\|B\|\le\|A\|<\infty$.

注 若 $A\in L(H)$, 则 A 自伴当且仅当对任意的 $x,y\in H$, 有 $(Ax,y)=\overline{(Ay,x)}$; 当 Φ 为复数域时, A 自伴当且仅当对任意的 $x\in H$, 有 (Ax,x) 为实数.

定理 1.1.3 设 $A,B\in L(H)$, $\alpha,\beta\in\Phi$, 则

(1) $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$;

(2) $(A^*)^*=A$;

(3) $(AB)^*=B^*A^*$;

(4) $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$;

(5) $N(A)=R(A^*)^\perp$;

(6) $N(A^*)=R(A)^\perp$;

(7) $\overline{R(A)}=N(A^*)^\perp$;

(8) $\overline{R(A^*)}=N(A)^\perp$.

定理 1.1.4 设 $T\in L(H)$, 且 Φ 是复数域.

(1) T 是正常的当且仅当 $\forall x\in H$, $\|Tx\|=\|T^*x\|$.

(2) 若 T 是正常的, 则 $N(T)=N(T^*)=R(T)^\perp$.

(3) 若 T 是正常的, $x\in H$ 是 T 的相应于 α 的特征向量, 则 $T^*x=\overline{\alpha}x$.

(4) 若 T 是正常的, 则 T 的不同特征值的特征向量彼此正交.

证 (1) 若 T 是正常的, 即 $T^*T=TT^*$, 则

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)=(TT^*x,x)=\|T^*x\|^2.$$

反之，若 $\forall x\in H$, 有 $\|Tx\|=\|T^*x\|$, 则

$$\Big((T^*T-TT^*)\,x,x\Big)=0.$$

因若 $S\in L(H)$ 且在复空间中 $\forall x\in H$, $(Sx,x)=0$, 则必有 $S=0$. 事实上，由对任意的 $x,y\in H$ 有 $(S(x+y),x+y)=0$, 故

$$(Sx,y)+(Sy,x)=0 \quad 且 \quad (Sx,\mathrm{i}y)+(S(\mathrm{i}y),x)=0,$$

因此 $(Sx,y)-(Sy,x)=0$. 从而对任意的 $x,y\in H$ 有 $(Sx,y)=0$, 故 $S=0$. 从而 (1) 成立.

(2) 对任意的 $x\in N(T)$ 有 $Tx=0$, 由 (1) 知，当且仅当对任意的 $x\in H$, $T^*x=0$, 故 $x\in N(T^*)$. 再由定理 1.1.3 知结论成立.

(3) 由 T 是正常的知 $T-\alpha I$ 也是正常的，再由 (1) 知结论成立.

(4) 设 $Tx=\alpha x$, $Ty=\beta y$ 且 $\alpha\neq\beta$. 则由 (3) 可知 $T^*y=\overline{\beta}y$, 从而

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,y)=(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,\overline{\beta}y)=\beta(x,y),$$

故 $x\perp y$.

对酉算子，易证下面结果：

定理 1.1.5 设 H 是复 Hilbert 空间， $U\in L(H)$, 则下列条件等价：

(1) U 是酉算子 (即 $UU^*=U^*U=I$)；

(2) U 是满射，且对任意 $x,y\in H$ 有 $(Ux,Uy)=(x,y)$；

(3) U 是满射，且对任意 $x\in H$ 有 $\|Ux\|=\|x\|$.

证 只须证 (3) $\Rightarrow$ (1). 由 $\|Ux\|=\|x\|$，得

$$(U^*Ux,x)=(x,x),$$

故 $U^*U=I$. 再由 (3) 知， U 是可逆的，从而 $U^*=U^{-1}$, 故 U 是酉算子.

定理 1.1.6 (Fuglede-Putnam-Rosenldum) 设 $M,N,T\in L(H)$，且 M,N 都是正常的. 若 $MT=TN$，则 $M^*T=TN^*$.

证　由 $MT=TN$, 则对任意自然数 $k\geq 0$, 有 $M^kT=TN^k$. 故若 $p(z)$ 是多项式，则

$$p(M)T=Tp(N).$$

从而对任意固定的复数 z, 有 $e^{i\bar{z}M}T=Te^{i\bar{z}N}$, 即有 $T=e^{-i\bar{z}M}Te^{i\bar{z}N}$. 令

$$f(z)=e^{-izM^*}Te^{izN^*}=e^{-i(zM^*+\bar{z}M)}Te^{i(zN^*+\bar{z}N)},$$

易见， $e^{-i(zM^*+\bar{z}M)}$, $e^{i(zN^*+\bar{z}N)}$ 都是酉算子，故 $\|f(z)\|\leq\|T\|$. 又 $f(z)$ 解析，由刘维尔定理知 $f(z)$ 是常值函数. 从而

$$0=f'(z)=-iM^*e^{-izM^*}Te^{izN^*}+i\,e^{-izM^*}Te^{izN^*}N^*.$$

令 $z=0$, 得 $M^*T=TN^*$.

1.2 投影算子与正算子的平方根

假设 H 是复 Hilbert 空间. 若 $T\in L(H)$, 且 $T^2=T$, 则称 T 是**幂等算子**, 自伴的幂等算子称为**投影算子**; 若 $\forall x\geq 0$, $(Tx,x)\geq 0$, 则称 T 是**正算子**, 记为 $T\geq 0$. 若 T 是可逆的正算子，则称 T 是**严格正算子**, 记为 $T>0$.

定理 1.2.1　若 $P\in L(H)$，则下列条件等价:

(1) P 是投影算子;

(2) $P^2=P$ 并且 P 是正常的;

(3) $P^2=P$ 并且 $R(P)=N(P)^\perp$;

(4) $(Px,x)=\|Px\|^2$ $(\forall x\in H)$.

证　(1) $\Rightarrow$ (2)　显见.

(2) $\Rightarrow$ (3)　由定理 1.1.4 知，若 P 正常，则 $N(P)=R(P)^\perp$. 又 $P^2=P$, 故 $R(P)=N(I-P)$. 从而 $R(P)$ 是闭的，且

$$R(P)=\overline{R(P)}=\left(\overline{R(P)}^\perp\right)^\perp=N(P)^\perp.$$

(3) $\Rightarrow$ (4)　假设 $x\in H$. 令 $z=Px$, $y=x-Px$, 则 $Py=0$, $Pz=z$, 故 $y\in N(P)$, $z\in R(P)$. 所以由 (3) 得 $y\perp z$, 从而有

$$(Px,x)=(z,z+y)=(z,y)+(z,z)=(z,z)=\|Px\|^2.$$

(4) ⇒ (1) 由 $\|Px\|^2$ 是实数，故

$$(Px,x)=(x,P^*x)=\overline{(P^*x,x)}=(P^*x,x),$$

由 H 是复空间知 $P=P^*=P^2$; 又

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x),$$

故 $P^2=P$.

定义 3 设 H 是 Hilbert 空间， $A\in L(H)$, 称

$$W(A)=\{(Ax,x):\ \forall x\in H,\ \|x\|=1\}$$

为 A 的 **数值值域**; 称

$$\omega(A)=\sup_{\mu\in W(A)}|\mu|$$

为 A 的 **数值半径**.

关于数值值域，我们有下列著名的 **Toeplitz-Hausdorff** 定理.

定理 1.2.2 [59] 设 H 是 Hilbert 空间， $T\in L(H)$，则 T 的数值值域 $W(T)$ 是复平面上的凸集.

证 对 H 中任意两个单位向量 x,y, 令 $\xi=(Tx,x)$, $\eta=(Ty,y)$; 现证对任意 $t\in[0,1]$, 有 $t\xi+(1-t)\eta\in W(T)$. 不妨设 $\xi\neq\eta$, 记

$$\alpha=\frac{1}{\xi-\eta},\quad \beta=\frac{-\eta}{\xi-\eta},$$

则只要证明 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$. 事实上，如果 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$ 成立，则对任意 $t\in[0,1]$, 有 H 中的单位向量 z 使得 $t=\alpha(Tz,z)+\beta$, 从而

$$\begin{aligned}\alpha(Tz,z)+\beta&=t=t(\alpha\xi+\beta)+(1-t)(\alpha\eta+\beta)\\&=\alpha\Big[t\xi+(1-t)\eta\Big]+\beta,\end{aligned}$$

故 $t\xi+(1-t)\eta=(Tz,z)\in W(T)$. 下面考虑 $\alpha T+\beta$ 的笛卡儿分解 $A+\mathrm{i}B$, 其中 A,B 为自伴算子，易证 $(Bx,x)=0$, $(By,y)=0$. 不妨设

(Bx,y) 是一个纯虚数，必要时可将 x 乘以一个单位复数. 由 $\xi \neq \eta$ 知，单位向量 x,y 必线性无关，令 $h(t)=tx+(1-t)\,y$, 则 $h(t)\neq 0$. 由

$$(Bx,x)=(By,y)=\mathrm{Re}(Bx,y)=0,$$

则对所有 $t\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\Big(Bh(t),h(t)\Big)\\&=t^2(Bx,x)+t(1-t)\left((Bx,y)+\overline{(Bx,y)}\right)+(1-t)^2(By,y)\\&=0.\end{aligned}$$

再由 A 自伴，可知

$$f(t)=\left((\alpha T+\beta)\frac{h(t)}{\|h(t)\|},\frac{h(t)}{\|h(t)\|}\right)\in W(\alpha T+\beta),$$

且它是 $[0,1]$ 上的实值连续函数，因 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 由介值定理可知 $[0,1]\subseteq W(\alpha T+\beta)$.

定义 4 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in L(H)$, 如果复数 λ 使得 $\lambda I-A$ 可逆，则称 λ 是 A 的 **正则点**, A 的所有正则点组成的集合称为 A 的 **预解集**, 记为 $\rho(A)$; A 的非正则点，称为 **谱点**, 所有谱点组成的集合称为 A 的 **谱集**, 记为 $\sigma(A)$.

定理 1.2.3 设 H 是 Hilbert 空间，$A\in L(H)$ 是自伴算子，则

(1) $\sigma(A)\subseteq\overline{W(A)}$ ($\overline{W(A)}$ 是 $W(A)$ 的闭包)；

(2) $\omega(A)=\sup\limits_{\mu\in W(A)}|\mu|=\|A\|$；

(3) $r(A)=\sup\limits_{\mu\in\sigma(A)}|\mu|=\|A\|$,

其中 $\omega(A)$ 称为 A 的 **数值半径**, $r(A)$ 称为 A 的 **谱半径**.

证 (1) 由 A 是自伴算子，故 $W(A)\subseteq\mathbf{R}$. 若 $\lambda\notin\overline{W(A)}$, 设

$$d=\rho(\lambda,\overline{W(A)})=\inf_{\mu\in W(A)}|\lambda-\mu|>0.$$

则 $\forall x\in H$, $x\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}d\,\|x\|^2&\le\left|\lambda-\left(A\frac{x}{\|x\|},\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\|x\|^2=\left|\Big((\lambda I-A)\,x,x\Big)\right|\\&\le\|(\lambda I-A)\,x\|\|x\|.\end{aligned}$$

故

$$d\|x\| \le \|(\lambda I - A)\,x\|. \tag{1.2.1}$$

若 $y_n \in R(\lambda I - A)$, 则 $y_n = (\lambda I - A)\,x_n$, $x_n \in H$. 如果 $\{y_n\}$ 是柯西列, 由 (1.2.1) 知 $\{x_n\}$ 也是, 故 x_n 收敛于某 x_0 于 H 中, 所以 $y_n \to (\lambda I - A)\,x_0$ 于 $R(\lambda I - A)$ 中. 因此 $R(\lambda I - A)$ 是闭的.

下面断言 $\lambda I - A$ 是到上的. 事实上, 如果它不是到上的, 由 Riesz 表现定理, 则存在 $y \in H, \|y\| = 1$ 使得

$$\Big((\lambda I - A)\,x, y\Big) = 0, \quad \forall\, x \in H.$$

特别地, 有 $\Big((\lambda I - A)\,y, y\Big) = 0$. 故

$$\lambda = \lambda\,\|y\|^2 = (Ay, y) \in W(A),$$

此与 $\lambda \notin \overline{W(A)}$ 矛盾. 从而 $\lambda I - A$ 是一一到上的, 由逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$, $\lambda \in \rho(A)$, 所以 $\lambda \notin \sigma(A)$.

(2) 对任意的 $\mu \in W(A)$, 存在 $\|x\| = 1$ 使得 $\mu = (Ax, x)$, 故

$$|\mu| \le \|A\|\|x\|^2 = \|A\|.$$

从而

$$\omega(A) = \sup_{\mu \in W(A)} |\mu| \le \|A\|.$$

反之, 记 $a = \sup\limits_{\mu \in W(A)} |\mu|$, 则 $|(Ax, x)| \le a\|x\|^2$. 又

$$4\,\mathrm{Re}(Ax, y) = \Big(A(x+y), x+y\Big) - \Big(A(x-y), x-y\Big),$$

故

$$|4\mathrm{Re}(Ax, y)| \le a(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2a(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1.2.2}$$

如果 $A = 0$, 结论显然成立. 如果 $A \ne 0$, 则存在 $x \in H$, $\|x\| = 1$ 使 $Ax \ne 0$. 令 $y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$, 则

$$\|Ax\| = \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \mathrm{Re}(Ax, y) \le \frac{a}{2}\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) = a.$$

从而 $\|A\| \le a = \omega(A)$. 因此 $\|A\| = \omega(A)$.

(3) 记 $M=\sup\limits_{\mu\in W(A)}\mu$, $m=\inf\limits_{\mu\in W(A)}\mu$, 则可断言 $M,m\in\sigma(A)$. 事实上，设 $B=MI-A$，则

$$B\geq 0,\quad \inf_{\|x\|=1}(Bx,x)=0, \tag{1.2.3}$$

因此由 (1.2.3) 可断言 $M\in\sigma(A)$. 因为 (1.2.3) 可蕴含

$$\Big(B(tBx+x),tBx+x\Big)\geq 0,\quad \forall t\in\mathbf{R},$$

故对任意实数 t, $t^2(B^2x,Bx)+2t\|Bx\|^2+(Bx,x)\geq 0$. 因此

$$\|Bx\|^4\leq\|B\|^3\|x\|^2|(Bx,x)|.$$

所以 (1.2.3) 可蕴含

$$\inf_{\|x\|=1}\|Bx\|=0. \tag{1.2.4}$$

如果 B 是一一到上的，那么 B^{-1} 有界. 由 $\|Bx\|\|B^{-1}\|\geq\|x\|$, 得

$$\inf_{\|x\|=1}\|Bx\|>0,$$

此与 (1.2.4) 矛盾. 同理，可知 $m\in\sigma(A)$. 再由 $W(A)\subseteq[m,M]$, 有

$$\omega(A)\leq\max\{|M|,|m|\}\leq\sup_{\mu\in\sigma(A)}|\mu|=r(A),$$

且由 $\sigma(A)\subseteq\overline{W(A)}$ 可知， $r(A)\leq\omega(A)$, 因此 (3) 成立.

定理 1.2.4 假设 $A,B\in L(H)$, 则 $\sigma(AB)-\{0\}=\sigma(BA)-\{0\}$.

证 假设 $\lambda\neq 0$, 我们证明 $AB-\lambda I$ 与 $BA-\lambda I$ 同时可逆或同时不可逆，为此只需证明 $\lambda=1$ 时的情况. 假若 $I-AB$ 可逆，于是存在 $C\in L(H)$ 使得 $C(I-AB)=(I-AB)C=I$, 从而

$$\begin{aligned}(I+BCA)(I-BA)&=I-BA+BCA-BCABA\\&=I+BCA-B(I+CAB)A\\&=I+BCA-BCA=I.\end{aligned}$$

同理 $(I-BA)(I+BCA)=I$. 故 $I-BA$ 可逆.

注 一般情况下，在无穷维空间中未必有 $\sigma(AB)=\sigma(BA)$，譬如 l_2 上的右移算子 $A(x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots)$ 和其共轭算子就不具有这个性质. 当 A 正规时，有 $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. 事实上，当 AB 可逆时，存在 X 使得 $ABX=XAB=I$，故 A 满， A^* 单，但 $N(A)=N(A^*)$，从而 A 单，故 A 可逆，因此 BA 可逆；反之亦然.

定理 1.2.5 设 H 是 Hilbert 空间， $T\in L(H)$，则 $T\geq 0$ 当且仅当 $T=T^*$ 且 $\sigma(T)\subseteq[0,\infty)$.

证 若 $T\geq 0$，则对任意的 $x\in H$ 有 $(Tx,x)\geq 0$，故

$$(Tx,x)=\overline{(Tx,x)}=(T^*x,x).$$

因 H 是复空间，所以 $T=T^*$，且又 T 的数值值域包含在正半实轴中，故由定理 1.2.2 知 $\sigma(T)$ 也在 $[0,\infty)$ 中.

若 $T=T^*$ 且 $\sigma(T)\subseteq[0,\infty)$，由 $T=T^*$，知 (Tx,x) 是实数. 此时假设存在 $x_0\in H$ 使得 $(Tx_0,x_0)<0$，记 $\alpha=\inf\limits_{x\in H,\ \|x\|=1}(Tx,x)$，则 $\alpha<0$. 令 $B=T-\alpha I$，则对任意的 $y\in H,\ \|y\|=1$ 有

$$(By,y)=(Ty,y)-\alpha\geq 0,$$

即 $B\geq 0$. 又

$$\inf_{x\in H,\ \|x\|=1}(Bx,x)=\inf_{x\in H,\ \|x\|=1}\Big((Tx,x)-\alpha\Big)=0,$$

类似于 (1.2.3) 的证明可知 B 不是可逆的. 从而 $\alpha\in\sigma(T)$，此与假设 $\sigma(T)\subseteq[0,\infty)$ 矛盾. 因此 $T\geq 0$.

定理 1.2.6 设 T 是自伴算子， $T\geq 0$，则

(1) $\forall S\in L(H)$, $S\geq 0$ 时，有 $T+S\geq 0$；

(2) $\forall\alpha\geq 0$，有 $\alpha T\geq 0$；

(3) 对任一自然数 n，有 $T^n\geq 0$；

(4) 存在唯一的 $S\geq 0$, $S\in L(H)$，使得 $S^2=T$，且若 B 与 T 可换，则 S 与 B 可换；此时称 S 是 T 的**平方根**；

(5) 若 $T'\geq 0$, $TT'=T'T$，则 $TT'\geq 0$，且去掉条件 $TT'=T'T$ 时，结论未必成立.

证 (1),(2) 显见.

(3) 对 $x \in H$, 当 $n = 2k$ 为偶数时，有

$$(T^n x, x) = (T^k x, T^k x) \geq 0;$$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时，有

$$(T^n x, x) = (TT^k x, T^k x) \geq 0.$$

故 $T^n \geq 0$.

(4) 不妨设 $\|T\| \leq 1$, 则 $0 \leq I - T \leq I$. 令

$$A_1 = \frac{1}{2}(I - T), \quad A_n = \frac{1}{2}(I - T + A_{n-1}^2)\ (n \geq 2).$$

由归纳法易见 $\|A_n\| \leq 1$, 且 A_n 都是 $I-T$ 的正系数多项式. 又 $I-T \geq 0$, 故 $A_n \geq 0$. 另一方面，有 $A_n A_{n-1} = A_{n-1} A_n$,

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - A_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(A_n - A_{n-1})(A_n + A_{n-1}),$$

故由 A_n 及 $A_2 - A_1 = \frac{1}{2}A_1^2$ 都是 $I - T$ 的正系数多项式，应用归纳法可知 $A_n - A_{n-1}$ 都是 $I - T$ 的正系数多项式，故 $A_n \geq A_{n-1} \geq 0$. 从而 $\forall x \in H$, 数列 $(A_n x, x)$ 单调递增，且

$$|(A_n x, x)| \leq \|x\|^2 \|A_n\| \leq \|x\|^2.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n x, x)$ 存在. 所以 $((A_n - A_m)\,x, x) \to 0\ (m, n \to \infty)$. 当 $n \geq m$ 时，应用定理 1.2.3 的证明可知

$$\|(A_n - A_m)\,x\|^4 \leq \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 \left|\Big((A_n - A_m)\,x, x\Big)\right|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ 依范数拓扑意义下存在. 令 $S_0 x = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. 由 $A_n \geq 0$, 知 $S_0 \geq 0$ 且 $\|S_0\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|A_n\| \leq 1$, 故 $0 \leq S_0 \leq I$, 且由

$$A_n = \frac{1}{2}(I - T + A_{n-1}^2),$$

两边令 $n \to \infty$, 得 $S_0 = \dfrac{1}{2}(I - T + S_0^2)$. 所以

$$(S_0 - I)^2 = T.$$

记 $S=I-S_0$, 即有 $S^2=T$. 若 $BT=TB$, 则 $BA_n=A_nB$, 令 $n\to\infty$, 得 $BS=SB$.

下面证明唯一性. 如果另有 $S_1\geq 0$, 使 $S_1^2=T$, 因 S_1^2 与 T 可换从而 S_1^2 与 S 可换, 进而 S_1 与 S 可换. $\forall x\in H$, 令 $y=(S_1-S)x$, 则

$$0=\Big((S_1^2-S^2)x,y\Big)=\Big((S_1+S)y,y\Big)\geq 0.$$

故 $(S_1y,y)=(Sy,y)=0$. 又 $S_1\geq 0$, $S\geq 0$, 知 $S_1^{\frac{1}{2}}y=0$, $S^{\frac{1}{2}}y=0$, 所以

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= (y,y)=(S_1x,y)-(Sx,y)\\ &= (S_1^{\frac{1}{2}}x,S_1^{\frac{1}{2}}y)-(S^{\frac{1}{2}}x,S^{\frac{1}{2}}y)=0,\end{aligned}$$

所以 $y=0$ 即 $S_1=S$.

(5) 设 $T=S^2$, 则 $ST'=T'S$. 从而

$$(TT'x,x)=(ST'x,Sx)=(T'Sx,Sx)\geq 0.$$

注 去掉条件 $TT'=T'T$ 时,结论未必成立. 例如 $T=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$, $T'=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$, 则 $TT'=\begin{pmatrix}-1&2\\-4&8\end{pmatrix}$ 不是正算子.

1.3 部分等距与极分解

设 H_1,H_2 是复 Hilbert 空间, $U\in L(H_1,H_2)$. 如果对任意的 $f\in H_1$ 有 $\|Uf\|=\|f\|$, 则称为一个 **等距**; 易见对线性变换 U 为等距当且仅当 $U^*U=I$.

定义 5 设 U 是一个 $H_1\to H_2$ 的线性算子. 若对任意的 $f\in N(U)^\perp$ 有 $\|Uf\|=\|f\|$, 则称 U 是 **部分等距**.

显见, 自伴投影算子是一个部分等距; 当 $U\neq 0$ 且 U 为部分等距时, 有 $\|U\|=1$. 我们称 $N(U)^\perp$ 为部分等距 U 的 **初始空间**. 我们知道, 当 U 是部分等距时, 必有

$$N(U)^\perp=\{f\in H_1:\ \|Uf\|=\|f\|\}.$$

事实上，若 $f \in H_1$，$\|Uf\| = \|f\|$，记 $f = g + h$，其中 $g \in N(U)$，$h \perp N(U)$，则 $h \in N(U)^{\perp}$，且由部分等距的定义有

$$\|f\| = \|Uf\| = \|Ug + Uh\| = \|Uh\| = \|h\|.$$

又 $\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$，故 $g = 0$，即 $f \in N(U)^{\perp}$，反之显见．对一个部分等距 U 称其值域 $R(U)$ 为 U 的**终空间**．

定理 1.3.1　一个有界线性算子 U 是一个部分等距当且仅当 U^*U 是一个到 U 的始空间 $N(U)^{\perp}$ 上的正交投影．

证　设 H, K 是复 Hilbert 空间，$U : H \to K$ 是一个部分等距且始空间为 $M = N(U)^{\perp}$．令 $E : H \to M$ 为 H 到 M 上的正交投影．当 $f \in M$ 时，有 $Ef = f$，故

$$(U^*Uf, f) = \|Uf\|^2 = \|f\|^2 = (Ef, f).$$

当 $f \in M^{\perp}$ 时，则

$$(U^*Uf, f) = 0 = (Ef, f).$$

故 $\forall f \in H$，都有 $(U^*Uf, f) = (Ef, f)$．从而 $U^*U = E$．

反之，设 U 是一个 H 到 K 内的有界线性算子，使得 U^*U 是 H 到某子空间 M 上的正交投影 E，故对 H 中任意的 f，有

$$\|Uf\|^2 = (U^*Uf, f) = (Ef, f) = (Ef, Ef) = \|Ef\|^2.$$

从而 $f \in N(U)$ 当且仅当 $Ef = 0$，当且仅当 $f \in M^{\perp}$，即 $N(U) = M^{\perp}$；当 $f \in M$ 时，$\|Uf\| = \|f\|$．故 U 是以 M 为始空间的部分等距．

推论 1.3.1　(1) U 是部分等距，则 U 的始空间是 U^*U 的值域．

(2) 部分等距算子的伴随算子也是部分等距，且其一的始空间为另一个的终空间．

(3) 一个有界线性算子 U 是部分等距当且仅当 $U = UU^*U$．

证　(1) 由 U 的始空间为 $N(U)^{\perp}$，故由定理 1.1.3 有

$$N(U)^{\perp} = N(U^*U)^{\perp} = R(U^*U).$$

(2) 若 U^*U 为投影，故 $U^*U = (U^*U)^2$，从而

$$(UU^*)^2 = UU^*UU^* = U(U^*U)^2U^* = (UU^*)^3.$$

故

$$(UU^*)^4 = (UU^*)^3 = (UU^*)^2.$$

两边开方得 $UU^* = (UU^*)^2$, 故由定理 1.3.1 知 U^* 为部分等距，且

$$N(UU^*)^{\perp} = N(U^*)^{\perp} = \overline{R(U)}.$$

下证 $R(U)$ 是闭的. 事实上，若 $Uf_n \to g$, $f_n \in N(U)^{\perp}$, 则

$$\|f_n - f_m\| = \|U(f_n - f_m)\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

故存在 f_0 使 $f_n \to f_0$, $g = Uf_0 \in R(U)$, 即 $R(U)$ 闭. 从而 U^* 的始空间为 U 的值域.

(3) 若 U 是部分等距, 则 U^*U 为投影, 其值域为 U 的始空间 $N(U)^{\perp}$, 故 $U(U^*U) = U$ 于 $N(U)^{\perp}$. 另一方面，显然有 $U(U^*U) = U$ 于 $N(U)$ 上. 故 $UU^*U = U$. 反之，若 $UU^*U = U$, 则 $(U^*U)^2 = U^*U$, 故 U^*U 为投影.

综合上述，易得

推论 1.3.2 设 U 是 H 上一个有界线性算子，则下列条件等价：

(1) U 是部分等距；

(2) U^* 是部分等距；

(3) $U = UU^*U$ ；

(4) $U^* = U^*UU^*$ ；

(5) U^*U 是一个正交投影；

(6) UU^* 是一个正交投影.

定理 1.3.2 (极分解定理) 若 $A : H \to K$ 是有界线性算子，则存在部分等距 $U : H \to K$ 及一个正算子 P 使 $A = UP$, 且可使 $N(U) = N(P)$, 并且在 $N(U) = N(P)$ 条件下， U, P 是唯一的. 此时称 $A = UP$ 为 A 的 (右)**极分解**.

证 由 A^*A 是 H 上的正算子，故有唯一的正的平方根 P. 又对任意的 $f \in H$, 有

$$\|Pf\|^2 = (Pf, Pf) = (P^2 f, f) = (A^*Af, f) = \|Af\|^2.$$

故方程 $UPf = Af$ 就定义了一个线性算子 $U : R(P) \to K$, 且 U 是 $R(P)$ 上的等距. 因 U 在 $R(P)$ 上有界, 从而它在 $\overline{R(P)}$ 上有唯一的有界延拓, 进而可延拓成 H 到 K 的以 $\overline{R(P)}$ 为始空间的部分等距, 仍记为 U. 由 U 的定义, 显见有 $A = UP$, 且由 P 自伴有

$$N(U) = \overline{R(P)}^{\perp} = N(P).$$

下证唯一性. 设 $A = UP$, U 为部分等距, $P \geq 0$, 且 $N(U) = N(P)$, 故由定理 1.3.1 有

$$A^*A = PU^*UP = PEP,$$

其中 E 是 H 到 U 的始空间 $N(U)^{\perp}$ 的投影. 但

$$N(U)^{\perp} = N(P)^{\perp} = \overline{R(P)},$$

故 $EP = P$, 从而 $A^*A = P^2$, 由正算子平方根的唯一性知, P 是唯一的. 再由方程 $UPf = Af$ 唯一地确定了 U 在 $R(P)$ 上的值, 而 U 在 $N(P)$ 上的值为 0 (因 $N(U) = N(P)$), 所以 U 也是有上述条件唯一确定的.

推论 1.3.3　若 $A : H \to K$ 是有界线性算子, 且 $A = UP$ 是 A 的极分解, 则 $U^*A = P$.

推论 1.3.4　设 T 是 H 上一个有界线性算子, 且 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 其中 $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, 则 U 的始空间 M 和终空间 N 分别为

$$M = \overline{R(|T|)} = \overline{R(T^*)}, \quad N = \overline{R(T)}.$$

此外还有 $U^*U|T| = |T|$, 并且 U 是酉算子的充分必要条件是 $M = N = H$.

证　由定理 1.3.2, 知 $N = \overline{R(T)}$, 且 $N(U) = N(|T|)$, 故

$$M = N(U)^{\perp} = N(|T|)^{\perp} = \overline{R(|T|)}.$$

又由 U^*U 是到 $\overline{R(|T|)}$ 上的投影, 故有 $U^*U|T| = |T|$. 从而, $U^*T = U^*U|T| = |T|$, 及 $|T| = |T|^* = T^*U$ 成立. 再由 $T^* = |T|U^*$, 有

$$\overline{R(|T|)} = \overline{R(T^*)}.$$

定理 1.3.3 设 H 是复 Hilbert 空间, $T \in L(H)$.

(1) 若 T 可逆, 则 T 有唯一的极分解 UP , 其中 U 是酉算子, $P > 0$.

(2) 若 T 是正常的, 则 T 有极分解 UP , 其中 $UP = PU$, 且 U, P 亦与 T 可换.

证 (1) 由 T 可逆知 T^*T 可逆, 从而 $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 可逆. 又 $N(U) = N(P) = \{0\}$, 知 U 可逆.

(2) 设 T 有极分解 UP, 且 $T^*T = TT^*$, 故 $UP^2U^* = PU^*UP = P^2$, 进而,

$$U^*P^2 = U^*UP^2U^* = P^2U^*,$$

从而 U 与 P^2 可换, 那么 U 必与 P 可换. 最后,

$$TU = UPU = U^2P = UT, \quad TP = UP^2 = PUP = PT.$$

定理 1.3.4 设 H 是复 Hilbert 空间, $T \in L(H)$, 且 $T = U|T|$ 是 T 的极分解, 则

(1) 对每个正数 q , 有 $|T^*|^q = U|T|^qU^*$, $|T|^q = U^*|T^*|^qU$;

(2) $T^* = U^*|T^*|$ 是 T^* 的极分解.

证 (1) 由于 $N(|T|^q) = N(|T|)$, 故 $U^*U|T|^q = |T|^q$. 由此可得

$$|T^*|^2 = TT^* = U|T|^2U^* = U|T|U^*U|T|U^* = (U|T|U^*)^2,$$

且 $(U|T|U^*)^k = U|T|^kU^*$. 所以, 对一切多项式 $f_n(t)$, 有

$$f_n(|T^*|^2) = f_n((U|T|U^*)^2) = Uf_n(|T|^2)U^*.$$

取 $f_n(t)$ 在 $[0, \infty)$ 的某一有穷子区间上一致收敛于函数 $t^{\frac{q}{2}}$, 则

$$|T^*|^q = U|T|^qU^*.$$

(2) 由 (1) 可知,

$$T^* = |T|U^* = U^*U|T|U^* = U^*|T^*|.$$

另一方面, 由 $T^* = |T|U^*, N(U) = N(|T|)$, 可证

$$N(U^*) = N(|T^*|).$$

事实上，由 $\|Tx\|^2 = \||T|x\|^2$ 我们有

$$U^*x = 0 \Leftrightarrow UU^*x = 0 \Leftrightarrow |T|U^*x = 0$$
$$\Leftrightarrow T^*x = 0 \Leftrightarrow |T^*|x = 0.$$

定理 1.3.5　设 H 是复 Hilbert 空间，$T \in L(H)$ 是正常算子，则存在酉算子 U 使得 $T = U|T| = |T|U$，并且对任意与 T, T^* 都可换的算子 $A = V|A|$（极分解），U 与 A, V^*, V 都可换. 特别地，如果 T 自伴，则上述酉算子 U 还可使得 $U^* = U$.

证　设 T 有极分解 $T = U_1|T|$, 则 $U_1T = TU_1$, 且有 $U_1^*T = |T| = |T^*| = U_1|T|U_1^* = TU_1^*$, 故

$$(U_1^*U_1 - U_1U_1^*)|T| = U_1^*U_1|T| - U_1|T|U_1^* = 0.$$

另一方面，当 $x \in N(|T|)$ 时，有 $U_1x = 0$, $|T|U_1^*x = U_1^*|T|x = 0$, 因此 $U_1U_1^*x = 0$, 从而有 $U_1^*U_1 = U_1U_1^*$. 令

$$U = U_1U_1^*U_1 + I - U_1^*U_1,$$

可证 $U^*U = UU^* = I$, 且 $T = U|T|$. 再由 $|T|$ 与 V^*, V 及 $|A|$ 可换，则 $U_1^*U_1$ 也与 V^*, V 及 $|A|$ 可换，从而可验证

$$VU = UV, \quad V^*U = UV^*, \quad |A|U = U|A|.$$

1.4　降幂引理及比较引理

设 H 是 Hilbert 空间，A, B 是 H 上的有界线性算子. 若 $A > 0$, B 可逆，则有下述**降幂引理**.

引理 1.4.1 [43]　若 $A > 0$, B 可逆，则对任意实数 s 有

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*.$$

证　设 $BA^{\frac{1}{2}} = UP$ 是可逆算子 $BA^{\frac{1}{2}}$ 的极分解，其中 U 为酉算

子，则 $P=|BA^{\frac{1}{2}}|=(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$，于是

$$\begin{aligned}(BAB^*)^s &= (UP^2U^*)^s=UP^{2s}U^*=BA^{\frac{1}{2}}P^{-1}P^{2s}P^{-1}A^{\frac{1}{2}}B^*\\ &= BA^{\frac{1}{2}}(P^2)^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*=BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*.\end{aligned}$$

注 当 $s\geq 1$ 时，引理 1.4.1 中的可逆的条件可以去掉.

作为引理 1.4.1 的一个应用，我们有下列比较引理：

引理 1.4.2 [48] 令 $A>0$, $B>0$，而且 $\beta,r,\alpha_1,\alpha_2$ 是满足下列条件的任意实数：$\alpha_1+r\neq 0$, $\alpha_2+r\neq 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\geq\left(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}&\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\\ &\qquad\geq\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.\end{aligned}$$

证 由引理 1.4.1 我们可得

$$\begin{aligned}&\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\\ &=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left(A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^rA_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}-1}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\ &=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left[A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}\right]^{1-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\ &=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\alpha_1}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right.\\ &\quad\left.\cdot\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\ &=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right.\\ &\quad\left.\cdot\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}},\end{aligned}$$

以及

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}-1}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}},$$

故引理 1.4.2 得证.

1.5 几种特殊的算子类

我们先从算子的数值半径开始介绍.

定理 1.5.1 设 H 是 Hilbert 空间, T 是 H 上的有界线性算子, 则

(1) $\frac{1}{2}\|T\|\le\omega(T)\le\|T\|$;

(2) $\operatorname{co}\sigma(T)\subseteq\overline{W(T)}$;

(3) $r(T)\le\omega(T)\le\|T\|$;

(4) $\dfrac{1}{d(\mu,\sigma(T))}\le\|(T-\mu I)^{-1}\|\le\dfrac{1}{d(\mu,\overline{W(T)})}$, 其中在第一个不等式中 $\mu\notin\sigma(T)$, 在第二个不等式中 $\mu\notin\overline{W(T)}$;

(5) $\omega(T^n)\le\omega(T)^n$.

证 (1) 利用极化恒等式

$$\begin{aligned}(Tx,y)=\frac{1}{4}\Big[&\Big(T(x+y),x+y\Big)-\Big(T(x-y),x-y\Big)\\&+\mathrm{i}\Big(T(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y\Big)-\mathrm{i}\Big(T(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y\Big)\Big],\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}|(Tx,y)|&\le\frac{1}{4}\omega(T)\{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+\mathrm{i}y\|^2+\|x-\mathrm{i}y\|^2\}\\&=\omega(T)(\|x\|^2+\|y\|^2),\end{aligned}$$

故 (1) 成立.

(2) 如果 $\mu\notin\overline{W(T)}$, 则对 H 中任意单位向量 x, 有

$$0<d=d\left(\mu,\overline{W(T)}\right)\le|(Tx,x)-\mu|\le\|Tx-\mu x\|.$$

从而对任意向量 y 有

$$\|(T-\mu I)\,y\| \geq d\|y\|. \tag{1.5.1}$$

故 $T-\mu I$ 是一一的, 并且值域是闭的. 如果值域不满, 则 $N((T-\mu I)^*)\neq 0$, 此时必有单位向量 x 使得 $T^*x=\overline{\mu}x$, 故 $\mu\in W(T)$, 矛盾. 因此, $\mu\notin\sigma(T)$. 故 $\operatorname{co}\sigma(T)\subseteq\overline{W(T)}$.

(3) 由 (2) 可得.

(4) 第二个不等式由 (1.5.1) 可知. 第一个不等式由谱映照定理可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{d(\mu,\sigma(T))} &= \sup\{|z-\mu|^{-1} : z\in\sigma(T)\}\\ &= \sup\{|z| : z\in\sigma((T-\mu)^{-1})\}\\ &\leq \|(T-\mu)^{-1}\|.\end{aligned}$$

(5) 由齐性, 只需证明当 $\omega(T)\leq 1$ 时, 有 $\omega(T^n)\leq 1$. 而这又只需证明对单位圆内的一切复数 z 有

$$\operatorname{Re}\Big((I-z^nT^n)^{-1}x,x\Big)\geq 0.$$

显见当 $I-zT$ 可逆时, $\operatorname{Re}\Big((I-zT)\,x,x\Big)\geq 0$ 对一切 $x\in H$ 成立当且仅当 $\operatorname{Re}\Big((I-zT)^{-1}y,y\Big)\geq 0$ 对一切 $y\in H$ 成立. 再借助于下面的恒等式:

$$\begin{aligned}&(I-z^nT^n)^{-1}\\ &\quad=\frac{1}{n}\Big[(I-zT)^{-1}+(I-\omega zT)^{-1}+\cdots+(I-\omega^{n-1}zT)^{-1}\Big],\end{aligned}$$

其中 ω 是 1 的本原 n 次根. 则由上式有 $\operatorname{Re}\Big((I-z^nT^n)^{-1}x,x\Big)\geq 0$, 从而 $\operatorname{Re}\Big((I-z^nT^n)\,x,x\Big)\geq 0$. 故 $\omega(T^n)\leq 1$.

定义 6 若 $\|T\|=r(T)$, 则称算子 T 是**似正常的**; 若 $\omega(T)=r(T)$, 则称算子 T 是**似谱的**; 若对 H 中的任意单位向量 x, 有

$$\|T^2x\|\geq\|Tx\|^2,$$

则称算子 T 是**仿正常的**; 若存在 Hilbert 空间 $K\supseteq H$ 及 K 上的正常算子 N, 使得对任意 $x\in H$, $Tx=Nx$, 则称算子 T 是**次正常的**; 若

$$T^*T^2 = TT^*T,$$

则称算子 T 是**拟正常的**; 若 $\overline{W(T)} = \mathrm{co}\,\sigma(T)$, 则称算子 T 是**似凸的**; 若 $TT^* \le T^*T$, 则称算子 T 是**亚正常的**.

关于这些算子类，有以下包含关系：

定理 1.5.2 下列包含关系成立：

自伴算子类 $\subseteq$ 正常算子类 $\subseteq$ 拟正常算子类 $\subseteq$ 次正常算子类

$\subseteq$ 亚正常算子类 $\subseteq$ 仿正常算子类

$\subseteq$ 似正常算子类 $\subseteq$ 似谱算子类.

证 (1) 亚正常算子类 $\subseteq$ 仿正常算子类

若 T 是亚正常算子, 则对 H 中的每个向量 x, 有 $\|T^*x\| \le \|Tx\|$, 故 $\|T^*Tx\| \le \|T^2x\|$, 从而

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) \le \|T^*Tx\|\|x\| \le \|T^2x\|\|x\|.$$

故 T 是仿正常算子.

(2) 仿正常算子类 $\subseteq$ 似正常算子类

若 T 是仿正常算子，则

$$\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \ge \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad \forall x \in H,\ Tx \ne 0.$$

故

$$\frac{\|T^nx\|}{\|Tx\|} \ge \frac{\|T^nx\|}{\|T^{n-1}x\|}\frac{\|T^{n-1}x\|}{\|T^{n-2}x\|}\cdots\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \ge \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{n-1}$$

易见 $\|T^n\| \ge \|T\|^n$, 故 $\|T^n\| = \|T\|^n$. 因此 $r(T) = \|T\|$.

(3) 似正常算子类 $\subseteq$ 似谱算子类

由定理 1.5.1 (3) 可得.

(4) 次正常算子类 $\subseteq$ 亚正常算子类

若 T 是次正常算子， T 的正规延拓在某个 Hilbert 空间 $K \supseteq H$ 上可表示为

$$N = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

由 $N^*N = NN^*$, 可得 $T^*T = TT^* + XX^* \geq TT^*$.

(5) 拟正常算子类 $\subseteq$ 次正常算子类

若 T 是拟正常算子, $T = U|T|$ 是它的极分解, 则有 $U|T| = |T|U$, 从而

$$T^*T - TT^* = |T|^2 - U|T||T|U^* = |T|(I - UU^*)|T| \geq 0,$$

故 T 是亚正常的. 定义 $[T] = T^*T - TT^*$, 易证 $[T] \geq 0$, $[T]T = 0$, 从而对一切自然数 n, $[T]^nT = T^*[T]^n = 0$. 不难看出 $[T]$ 的平方根 S 也有 $ST = T^*S$. 令

$$N = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T^* \end{pmatrix},$$

则容易验证 N 是 T 的正规延拓.

第二章　几个重要的算子不等式

2.1　L-H 不等式及其等价命题

引理 2.1.1　设 $0 \le A \le B$, 则 $A^{\frac{1}{2}} \le B^{\frac{1}{2}}$.

证　不妨设 $B > 0$, 因一般情形可考虑用 $B + \varepsilon I$ 代替 B, 然后再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可. 显然由假设有 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \le I$, 故 $\left\|B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right\| \le 1$. 又

$$\left\|B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right\| = \left\|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right)^*\right\| = \left\|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right\|^2,$$

因此 $\left\|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right\| \le 1$. 由于 $B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}$ 是自伴算子, 故

$$\begin{aligned}\left\|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}\right\|^2 = \left\|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}\right\| &= r_{B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{4}}} = r_{B^{-\frac{1}{4}}B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{2}}} \\ &\le \left\|B^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right\| \le 1.\end{aligned}$$

从而

$$0 \le B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}B^{-\frac{1}{4}} \le \left\|B^{-\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}A^{\frac{1}{4}}B^{-\frac{1}{4}}\right\|I \le I,$$

即 $A^{\frac{1}{2}} \le B^{\frac{1}{2}}$.

定理 2.1.1（L-H 不等式）　设 $0 \le A \le B$, 则对一切 $\alpha \in [0,1]$, 有 $A^{\alpha} \le B^{\alpha}$.

证　不妨设 $0 < A \le B$, 由引理 2.1.1 得

$$B^{\frac{3}{4}}A^{-1}B^{\frac{3}{4}} \ge B^{\frac{1}{2}} \ge A^{\frac{1}{2}}.$$

从而

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{4}}A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \geq A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} = \left(A^{-\frac{1}{4}}\right)^2,$$

于是再由引理 2.1.1 得 $A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{4}}A^{-\frac{1}{2}} \geq A^{-\frac{1}{4}}$, 即 $B^{\frac{3}{4}} \geq A^{\frac{3}{4}}$.

下面用数学归纳法来证对一切自然数 k 及 $m = 1, 2, \cdots, 2^k$ 有

$$B^{\frac{m}{2^k}} \geq A^{\frac{m}{2^k}}.$$

事实上, $k = 1$ 时显然成立, 假若 $k = n-1$ 时成立. 首先对 $m = 2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \cdots, 2^n$, 由归纳假设知

$$B^{\frac{m}{2^n}}A^{-1}B^{\frac{m}{2^n}} \geq B^{\frac{m}{2^{n-1}}-1} \geq A^{\frac{m}{2^{n-1}}-1},$$

故

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-1}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}} \geq \left(A^{\frac{m}{2^n}-1}\right)^2.$$

由引理 2.1.1 得

$$A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{m}{2^n}}A^{-\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{m}{2^n}-1},$$

即 $B^{\frac{m}{2^n}} \geq A^{\frac{m}{2^n}}$.

其次, 如果 $1 \leq m \leq 2^{n-1}$, 由归纳假设知 $B^{\frac{m}{2^{n-1}}} \geq A^{\frac{m}{2^{n-1}}}$, 应用引理 2.1.1 也有 $B^{\frac{m}{2^n}} \geq A^{\frac{m}{2^n}}$. 由于 $\left\{\frac{m}{2^n} : m = 1, 2, \cdots, 2^n,\ n \geq 0\right\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 对每个固定的 $s \in [0,1]$, 我们可证当数列 p_n 收敛于 s 时, 必有 A^{p_n} 收敛于 A^s. 事实上, 只需证明若 $0 < m \leq M < \infty$, 当 $t_n \to s$ 时, 函数列 $f_n(x) = x^{t_n}$ 在 $[m, M]$ 上一致收敛即可. 现对函数 $f(s) = x^s$ 应用微分中值定理, 易知存在常数 Q 使得

$$\left|x^{t_n} - x^s\right| \leq Q\,|t_n - s|, \quad \forall x \in [m, M],$$

故结论成立.

定理 2.1.2 (**Heinz-Kato**)[21],[70] 设 $A > 0$, $B > 0$, $Q \in L(H)$, 且 $Q^*Q \leq A^2$, $QQ^* \leq B^2$, 则

$$|(Qx, y)| \leq \|A^s x\|\|B^{1-s}y\|, \quad \forall x, y \in H,\ 0 \leq s \leq 1.$$

证　我们由 L-H 不等式来证明定理 2.1.2.

设 $Q=UP$ 是 Q 的极分解, 记 $t=1-s$. 由 $Q^*Q\le A^2$, $QQ^*\le B^2$, 得

$$P^2\le A^2,\quad UP^2U^*\le B^2.$$

应用 L-H 不等式可知 $P^{2s}\le A^{2s}$, 且

$$UP^{2t}U^*=(UP^2U^*)^t\le B^{2t},$$

故

$$\begin{aligned}|(Qx,y)|^2&=|(UPx,y)|^2=|(P^sx,P^tU^*y)|^2\\&\le\|P^sx\|^2\|P^tU^*y\|^2=(P^{2s}x,x)(UP^{2t}U^*y,y)\\&\le(A^{2s}x,x)(B^{2t}y,y)=\|A^sx\|^2\|B^ty\|^2.\end{aligned}$$

注　由 Heinz-Kato 定理也蕴含 L-H 不等式. 事实上, 设 $A\ge B>0$. 令 $Q=B^{\frac12}$, $y=B^{s-\frac12}x$, $s\in[0,1]$. 则由 Heinz-Kato 定理知

$$\begin{aligned}\left\|B^{\frac s2}x\right\|^2&=\left|\left(B^{\frac12}x,B^{s-\frac12}x\right)\right|=|(Qx,y)|\\&\le\left\|A^{\frac s2}x\right\|\left\|\left(B^{\frac12}\right)^{1-s}B^{s-\frac12}x\right\|\\&=\left\|A^{\frac s2}x\right\|\left\|B^{\frac s2}x\right\|.\end{aligned}$$

故 $\left\|B^{\frac s2}x\right\|^2\le\left\|A^{\frac s2}x\right\|^2$, 即 $B^s\le A^s$.

推论 2.1.1 [28],[50]　下列诸条件等价:

(1) L-H 不等式;

(2) 若 $A\ge0,\ B\ge0,\ 0\le s\le1$, 则 $\|A^sB^s\|\le\|AB\|^s$;

(3) 若 $P,Q\ge0$, 则 $\|P^2Q\|\ge\|PQP\|$;

(4) 若 $0\le s\le1,\ Q^2\le A^2,\ Q=Q^*,\ A\ge0$, 则

$$|(Qx,y)|\le\|A^sx\|\|A^{1-s}y\|;$$

(5) Heinz-Kato 定理;

(6) 若 $A\ge B\ge0$, 则 $A^{\frac12}\ge B^{\frac12}$;

(7) 若 $A \geq 0$, $B \geq 0$, 则 $\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\| \leq \|AB\|^{\frac{1}{2}}$;

(8) 若 $A \geq 0$, $B \geq 0$, $Q \geq 0$, $0 \leq s \leq 1$, 则

$$\|A^sQB^{1-s}\| \leq \|AQ\|^s\|QB\|^{1-s}.$$

证 (1) ⇒ (2). 不妨设 A, B 可逆, 由 (1) 知, $\left\|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\| \leq 1$ 蕴含 $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, 又蕴含 $A^{-\frac{s}{2}}B^sA^{-\frac{s}{2}} \leq I$, 即 $\left\|A^{-\frac{s}{2}}B^{\frac{s}{2}}\right\| \leq 1$. 故当 $\|AB\| \leq 1$ 时, 有 $\|A^sB^s\| \leq 1$. 因此有

$$\left\|\left(\frac{A}{\|AB\|^{\frac{1}{2}}}\right)^s\left(\frac{B}{\|AB\|^{\frac{1}{2}}}\right)^s\right\| \leq 1,$$

即 $\|A^sB^s\| \leq \|AB\|^s$.

(2) ⇒ (8).

$$\begin{aligned}\|A^sQB^{1-s}\| &= \|A^sQ^sQ^{1-s}B^{1-s}\| \leq \|A^sQ^s\|\|Q^{1-s}B^{1-s}\| \\ &\leq \|AQ\|^s\|QB\|^{1-s}.\end{aligned}$$

(8) ⇒ (4). 先证 (8) 对自伴算子也成立, 事实上, 当 Q 自伴时, 存在酉算子 U 和正算子 P, 使得 $Q = UP$, 且 $U^* = U$, 故可得

$$\begin{aligned}\|A^sQB^{1-s}\| &= \|(UAU)^sPB^{1-s}\| \leq \|UAUP\|^s\|PB\|^{1-s} \\ &= \|AQ\|^s\|QB\|^{1-s}.\end{aligned}$$

假设 (4) 中条件成立, 且 A 可逆, 则有

$$\|(A^{-1})^{1-s}Q(A^{-1})^s\| \leq \|A^{-1}Q\|^{1-s}\|QA^{-1}\|^s = \|QA^{-1}\| \leq 1.$$

从而对任意的 $x, y \in H$, 有

$$\left|\left((A^{-1})^{1-s}Q(A^{-1})^sx, y\right)\right| \leq \|x\|\|y\|,$$

故 (4) 成立.

(7) ⇒ (6). 由 $A \geq B \geq 0$, 知 $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, 故

$$\left\|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|^2 = \left\|A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right\| \leq 1,$$

由 (7) 得

$$\left\|A^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{4}}\right\| \le \left\|A^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|^{\frac{1}{2}} \le 1,$$

即 $A^{-\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{4}} \le I$, 因此 $A^{\frac{1}{2}} \ge B^{\frac{1}{2}}$.

(6) $\Rightarrow$ (1). 由 L-H 不等式的证明即得.

(3) $\Rightarrow$ (7). 设 $A \ge 0,\ B \ge 0$, 由 (3) 知

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\| = \left\|A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right\|^{\frac{1}{2}} \le \|AB\|^{\frac{1}{2}}.$$

(7) $\Rightarrow$ (3). $\|PQP\| = \left\|PQ^{\frac{1}{2}}\right\|^2 \le \|P^2Q\|$.

(1) $\Rightarrow$ (5) 和 (5) $\Rightarrow$ (1). 由定理 2.1.2 即得.

(5) $\Rightarrow$ (4). 显然成立.

(4) $\Rightarrow$ (5). 设 $A > 0,\ B > 0,\ Q \in L(H)$, 且 $Q^*Q \le A^2,\ QQ^* \le B^2$, 令 $K = H \oplus H$, 考虑 K 上的算子

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}.$$

因为对 H 中任意两个元素 x, y 及任意两个数 $s, t \ge 0$ 有

$$(R(x \oplus 0), 0 \oplus y) = (Qx, y),$$
$$\|P^s(x \oplus 0)\| = \|A^s x\|, \quad \|P^t(0 \oplus y)\| = \|B^t y\|.$$

$R^2 \le P^2$ 当且仅当 $Q^*Q \le A^2,\ QQ^* \le B^2$, 故 (4) 蕴含 (5).

最近， T. Furuta 等人进一步得出如下结果:

推论 2.1.2　下列诸条件等价:

(1) L-H 不等式;

(2) 若 $A \ge 0,\ B \ge 0,\ q \ge 1$, 则 $\|A^qB^q\| \ge \|AB\|^q$;

(3) 若 $A, B \ge 0,\ s \ge t > 0$, 则

$$\left\|A^{\frac{1}{s}}B^{\frac{1}{s}}\right\|^s \le \left\|A^{\frac{1}{t}}B^{\frac{1}{t}}\right\|^t;$$

(4) 若 $A \ge 0,\ B \ge 0,\ p, q \ge 0$, 且 $\dfrac{p+q}{2} \ge 1$, 则

$$\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \le \|A^pB^p\|^{\frac{1}{2}}\|A^qB^q\|^{\frac{1}{2}};$$

(5) 若 $A \geq 0,\ B \geq 0,\ s,t > 0$ 且 $\dfrac{2st}{s+t} \leq 1$, 则

$$\|A^{st}B^{st}\|^2 \leq \|A^sB^s\|^{\frac{2st}{s+t}}\|A^tB^t\|^{\frac{2st}{s+t}};$$

(6) 若 $A \geq 0,\ B \geq 0,\ p,q \geq 0$, 且 $\dfrac{p+q}{2} \geq 1$, 则

$$\|AB\|^{\frac{p+q}{2}} \leq \|A^pB^q\|^{\frac{1}{2}}\|A^qB^p\|^{\frac{1}{2}};$$

(7) 若 $A \geq 0,\ B \geq 0,\ s,t > 0$ 且 $\dfrac{2st}{s+t} \leq 1$, 则

$$\|A^{st}B^{st}\|^2 \leq \|A^sB^t\|^{\frac{2st}{s+t}}\|A^tB^s\|^{\frac{2st}{s+t}}.$$

注意到当 $A, B \geq 0$ 及数 $s, t \geq 0$ 时，有

$$\left\|A^{\frac{s+t}{2}}B^{\frac{s+t}{2}}\right\|^2 \leq \|B^tA^{s+t}B^s\|.$$

可仿照推论 2.1.1 证明推论 2.1.2.

2.2 Furuta 不等式

设 H 是 Hilbert 空间，一个大写英文字母表示 H 上的有界线性算子，Furuta 证明了下述不等式，它是 L-H 不等式的推广.

定理 2.2.1 [38] 设 $A \geq B \geq 0$, 则

(1) $(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$;

(2) $A^{\frac{p+2r}{q}} \geq (A^rB^pA^r)^{\frac{1}{q}}$,

其中 $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$, 且 $(1+2r)q \geq p+2r$.

证 我们只证 (1). (2) 类似可得.

当 $0 \leq p \leq 1$ 时，由 L-H 不等式知结论明显成立. 故不妨设 $p > 1$ 且由 L-H 不等式，只需考虑 $q = \dfrac{p+2r}{1+2r}$时的情形. 不失一般性，可设 A, B 可逆. 令 $B^rA^{\frac{p}{2}} = UH$ 是可逆算子 $B^rA^{\frac{p}{2}}$ 的极分解，其中 U 是酉算子，

且 $H=\left|B^rA^{\frac{p}{2}}\right|$. 当 $0\le 2r\le 1$ 时，$B^{2r}\le A^{2r}$, 故有

$$\begin{aligned}B^{-r}(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}}B^{-r}&=B^{-r}(UH^2U^*)^{\frac{1}{q}}B^{-r}=B^{-r}UH^{\frac{2}{q}}U^*B^{-r}\\&=A^{\frac{p}{2}}H^{-1}H^{\frac{2}{q}}H^{-1}A^{\frac{p}{2}}\\&=A^{\frac{p}{2}}\left(A^{-\frac{p}{2}}B^{-2r}A^{-\frac{p}{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}A^{\frac{p}{2}}\\&\ge A^{\frac{p}{2}}\left(A^{-\frac{p}{2}}A^{-2r}A^{-\frac{p}{2}}\right)^{1-\frac{1}{q}}A^{\frac{p}{2}}\\&=A\ge B.\end{aligned}$$

故只要 $r\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $q=\dfrac{p+2r}{1+2r}$, 就有

$$(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}}\ge B^{1+2r}. \tag{2.2.1}$$

令 $A_1=(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}}$, $B_1=B^{1+2r}$, 则 $A_1\ge B_1\ge 0$. 如果 $r_1\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $p_1\ge 1$, $q_1=\dfrac{p_1+2r_1}{1+2r_1}$, 那么应有

$$\left(B_1^{r_1}A_1^{p_1}B_1^{r_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\ge B_1^{1+2r_1}. \tag{2.2.2}$$

在 (2.2.2) 中，令 $p_1=q\ge 1$, $r_1=\dfrac{1}{2}$, 则

$$\left(B^{2r+\frac{1}{2}}A^pB^{2r+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\ge B^{2(1+2r)}. \tag{2.2.3}$$

记 $s=2r+\dfrac{1}{2}$, 则

$$q_1=\frac{p_1+2r_1}{1+2r_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{p+2r}{1+2r}+1\right)=\frac{p+2s}{1+2s},$$

故 (2.2.1) 及 (2.2.3) 蕴含 $(B^sA^pB^s)^{\frac{1+2s}{p+2s}}\ge B^{1+2s}$ 对一切 $s\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ 成立. 继续下去，我们可知对一切 $r\ge 0$ 结论成立.

对两个正算子 A,B 及数 $\alpha\in[0,1]$, 它们的 α **平均** 定义为

$$A\sharp_\alpha B=A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha A^{\frac{1}{2}}.$$

定理 F 若 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $t \leq 0$, $p \geq 1$, 有

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq A.$$

事实上, 由 $-\dfrac{t}{2} \geq 0$, $p \geq 1$, $\dfrac{p-t}{1-t} \geq 1$ 及

$$\left[1+2\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\frac{p-t}{1-t} \geq p-2\left(-\frac{t}{2}\right),$$

应用 Furuta 不等式即得. 我们指出利用下面的定理, 还有更强的不等式

$$A^t \natural_{\frac{1-t}{p-t}} B^p \leq B \leq A.$$

定理 2.2.2 [40] 设 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $r \geq 0$ 及 $p \geq 1$,

(1) $F(p) = (B^r A^p B^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}$ 是 p 的单调增函数, 即当 $p_1 \geq p_2 \geq 1$ 时, 有 $F(p_1) \geq F(p_2) \geq F(1) = B^r A B^r \geq B^{1+2r}$;

(2) $G(p) = (A^r B^p A^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}$ 是 p 的单调降函数, 即当 $p_1 \geq p_2 \geq 1$ 时, 有 $G(p_1) \leq G(p_2) \leq G(1) = A^r B A^r \leq A^{1+2r}$.

证 设 $A \geq B \geq 0$, 则对每个 $r \geq 0$ 有下列不等式 (i),(ii):

(i) $B^r A^{p+s} B^r \geq (B^r A^p B^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}}$;

(ii) $(A^r B^p A^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} \geq A^r B^{p+s} A^r$,

其中 p, s 满足 $p \geq 0$ 及

$$0 \leq s \leq \begin{cases} p+2r, & 0 \leq r \leq \dfrac{1}{2}, \\ p+1, & r \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{*}$$

事实上, 利用降幂引理易得

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} = B^r A^{\frac{p}{2}} \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}} A^{\frac{p}{2}} B^r. \tag{2.2.4}$$

首先, 当 $0 \leq r \leq \dfrac{1}{2}$ 时, 由 $B^{2r} \leq A^{2r}$, (2.2.4) 及条件 (*), 应用 L-H 不等式得

$$(B^rA^pB^r)^{\frac{p+s+2r}{p+2r}} \le B^rA^{\frac{p}{2}}A^sA^{\frac{p}{2}}B^r = B^rA^{p+s}B^r.$$

其次，当 $r \ge \frac{1}{2}$ 时，有 $\frac{p+2r}{s} \ge 1$ 及

$$\left(1+2\cdot\frac{p}{2}\right)\frac{p+2r}{s} \ge 2r+2\cdot\frac{p}{2},$$

故由 Furuta 不等式知

$$\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}} \le A^s.$$

再由 (2.2.4) 易得 (i) 成立．(ii) 类似证明．最后利用 L-H 不等式，可知结论成立．

类似于定理 2.2.2 的证明，可知有下列结果：

定理 2.2.3　设 $A \ge B \ge 0$, 则对每个固定的 $t \ge 0$ 及 $r \ge 0$ 有

(1) $F_t(p) = (B^rA^pB^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}$ 是 $p \ge t \ge 0$ 上的关于 p 单调增函数；

(2) $G_t(p) = (A^rB^pA^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}$ 是 $p \ge t \ge 0$ 上的关于 p 单调降函数.

作为 Furuta 不等式的推广，我们有下列广义的 Furuta 不等式：

定理 G (广义 Furuta 不等式)　如果 $A \ge B \ge 0$, 且 $A > 0$, 则对 $t \in [0,1]$ 及 $p \ge 1$ 有

$$A^{1-t+r} \ge \left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}},$$

其中 $s \ge 1$ 且 $r \ge t$.

证　不妨设 $B > 0$, 现证明：如果 $A \ge B \ge 0$, 且 $A > 0$, 则对 $t \in [0,1]$ 及 $p \ge 1$, $s \ge 1$ 有

$$A \ge \left[A^{\frac{t}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{t}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}. \tag{2.2.5}$$

当 $1 \le s \le 2$ 时，由降幂引理和 L-H 不等式知

$$B_1 = \left[A^{\frac{t}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{t}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$$

$$= \left[B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{s-1}B^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$$

$$\leq \left[B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}B^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{s-1}B^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}}$$

$$= B \leq A = A_1. \tag{2.2.6}$$

对 $A_1 \geq B_1 > 0$, 应用 (2.2.6), 则对 $t_1 \in [0,1]$ 及 $p_1 \geq 1$, $1 \leq s_1 \leq 2$ 有

$$A_1 \geq \left[A_1^{\frac{t_1}{2}}\left(A_1^{\frac{-t_1}{2}}B_1^{p_1}A_1^{\frac{-t_1}{2}}\right)^{s_1}A_1^{\frac{t_1}{2}}\right]^{\frac{1}{(p_1-t_1)s_1+t_1}}. \tag{2.2.7}$$

令 $t_1 = t \in [0,1]$ 且 $p_1 = (p-t)s+t \geq 1$ 于 (2.2.7) 中, 则

$$A \geq \left[A^{\frac{t}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{s_1 s}A^{\frac{t}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s_1 s+t}}. \tag{2.2.8}$$

对 $t \in [0,1]$ 及 $p \geq 1$, $1 \leq s_1 s \leq 4$ 成立. 重复这一过程, 可知 (2.2.5) 对任意 $s \geq 1$ 成立. 令

$$A_2 = A, \quad B_2 = \left[A^{\frac{t}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{s}A^{\frac{t}{2}}\right]^{\frac{1}{(p-t)s+t}},$$

应用 Furuta 不等式对 $A_2 \geq B_2 \geq 0$, 知

$$A_2^{1+r_2} \geq \left(A_2^{\frac{r_2}{2}}B_2^{p_2}A_2^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}},$$

对 $r_2 = r - t \geq 0$, $p_2 = (p-t)s+t \geq 1$ 成立, 此即定理 G 结论成立.

2.3 具有负幂指数的 Furuta 型不等式

定理 2.3.1 [29], [69], [82], [116] 如果 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 那么下面结论成立:

(I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$, $p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}}$;

(II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$, $\frac{1}{2} \geq p$, 则 $A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}}$;

(III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则 $A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}}$;

(IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}$

为了证明该定理，我们首先给出下列引理：

引理 2.3.1　设 $0 \le t < p \le 1$ 且 $p \le \delta \le \min\{2p, 2(p-t)+1\}$. 则有

(1) 若对某个自然数 k 有 $2k \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\le \delta - 2k(p-t) \le \delta - 2(k-1)(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) \le 1; \\ -1 &\le \delta - 2k(p-t) - 2t \le \delta - 2(k-1)(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) - 2t \le 0; \end{aligned}$$

(2) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$\begin{aligned} -1 &\le \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \le \delta - 2k(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) - 2t \le 0; \\ 0 &\le \delta - 2k(p-t) \le \delta - 2(k-1)(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) \le 1. \end{aligned}$$

设 $0 \le p < t \le 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \le \delta \le p$. 则有

(3) 若对某个自然数 k 有 $2k \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\le \delta - 2(p-t) \le \delta - 4(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) \le 1; \\ -1 &\le \delta - 2p \le \delta - 4(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) - 2t \le 0; \end{aligned}$$

(4) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$\begin{aligned} -1 &\le \delta - 2(p-t) - 2t \le \delta - 4(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \le 0; \\ 0 &\le \delta - 2(p-t) \le \delta - 4(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) \le 1. \end{aligned}$$

证 假设 $0 \le t < p \le 1$ 且 $p \le \delta \le \min\{2p, 2(p-t)+1\}$.

(1) 当 $2k \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+1$ 时, 有 $2k(p-t) \le \delta - p < (2k+1)(p-t)$, 故

$$\begin{aligned}0 &\le p \le \delta - 2k(p-t) \le \delta - 2(k-1)(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) \le 1; \\ -1 &\le p - 2t \le \delta - 2k(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) - 2t = \delta - 2p \le 0.\end{aligned}$$

(2) 当 $2k+1 \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+2$ 时, 有 $(2k+1)(p-t) \le \delta - p < (2k+2)(p-t)$, 故

$$\begin{aligned}0 &\le 2p - t \le \delta - 2k(p-t) \le \cdots \le \delta - 2(p-t) \le 1; \\ -1 &\le -t = p - (p-t) - 2t \le \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(p-t) - 2t = \delta - 2p \le 0.\end{aligned}$$

假设 $0 \le p < t \le 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \le \delta \le p$.

(3) 若对某个自然数 k 有 $2k \le \dfrac{\delta - p}{p-t} < 2k+1$, 则

$$2k(p-t) \ge \delta - p > (2k+1)(p-t),$$

故 $\delta - 2k(p-t) - 2t \le p - 2t \le 0$, 即

$$\delta - 2k(p-t) \le p \le 1.$$

从而由 $2(p-t) \le \delta$, 知

$$\begin{aligned}0 &\le \delta - 2(p-t) \le \delta - 4(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) \le p \le 1; \\ -1 &\le \delta - 2p \le \delta - 4(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) - 2t \le p - 2t \le 0.\end{aligned}$$

(4) 若对某个自然数 k 有 $2k+1 \le \dfrac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则

$$(2k+1)(p-t) \ge \delta - p > (2k+2)(p-t),$$

故

$$\begin{aligned} \delta - 2k(p-t) &\le 2p - t \le p \le 1, \\ \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t &= \delta - 2k(p-t) - 2p \\ &\le 2p - t - 2p = -t \le 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} -1 &\le \delta - 2(p-t) - 2t \le \delta - 4(p-t) - 2t \le \cdots \\ &\le \delta - 2(k+1)(p-t) - 2t \le 0; \\ 0 &\le \delta - 2(p-t) \le \delta - 4(p-t) \le \cdots \\ &\le \delta - 2k(p-t) \le 1. \end{aligned}$$

引理 2.3.2　设 $A \ge B \ge 0$.

(1) 若 $0 \le t < p \le 1$ 且 $p \le \delta \le \min\{2p, 2(p-t)+1\}$, 则

$$\left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \le B^{\delta-p}.$$

(2) 若 $0 \le p < t \le 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \le \delta \le p$, 则

$$\left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \le B^{\delta-p}.$$

证　(1) 设 $0 \le t < p \le 1$ 且 $p \le \delta \le \min\{2p, 2(p-t)+1\}$.

若对某个自然数 k 有 $2k \le \dfrac{\delta-p}{p-t} < 2k+1$, 则由引理 2.3.1 及 L-H 不等式得

$$\begin{aligned} &\left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \\ &\quad = \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}-2k} \left(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k}B^{\delta-p-2k(p-t)}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1}B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\delta-2k(p-t)}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1}B^{\frac{p}{2}}A^{\delta-2k(p-t)-2t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1}B^{\delta-2k(p-t)-2t+p}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&= \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-2}B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\delta-2(k-1)(p-t)}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-2} \\
&\leq \cdots \\
&\leq B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\delta-2(p-t)}A^{-t}B^{\frac{p}{2}} \\
&\leq B^{\frac{p}{2}}A^{\delta-2p}B^{\frac{p}{2}} \leq B^{\delta-p}.
\end{aligned}
$$

若对某个自然数 k 有 $2k+1 \leq \dfrac{\delta-p}{p-t} < 2k+2$, 则由降幂引理得

$$
\begin{aligned}
&\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}} \\
&\quad= \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\delta-p}{p-t}-2k}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \\
&\quad\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k}B^{\frac{p}{2}}A^{\delta-2(k+1)(p-t)-2t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \\
&\quad\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k}B^{\delta-2(k+1)(p-t)+p-2t}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k} \\
&\quad= \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1}B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\delta-2k(p-t)}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\quad\leq \left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1}B^{\frac{p}{2}}A^{\delta-2k(p-t)-2t}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{k-1} \\
&\quad\leq \cdots \\
&\quad\leq B^{\frac{p}{2}}A^{\delta-2(p-t)-2t}B^{\frac{p}{2}} \leq B^{\delta-p}.
\end{aligned}
$$

(2) 若 $0 \leq p < t \leq 1$ 且 $\max\{2p-1, 2(p-t)\} \leq \delta \leq p$, 则也可仿照 (1) 来证明. 故略去.

定理 2.3.1 的证明 (I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$, $p \geq \dfrac{1}{2}$, 则在引理 2.3.2 (1) 中取 $\delta = 1$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1-p}{p-t}} \le B^{1-p}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1-p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\le A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}B^{1-p}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \le A^{1-t}.\end{aligned}$$

(II) 若 $1 \ge t > p \ge 0$, $\dfrac{1}{2} \ge p$, 则在引理 2.3.2 (2) 中取 $\delta = 0$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{-p}{p-t}} \le B^{-p}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{-p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\le A^{-t}.\end{aligned}$$

(III) 若 $\dfrac{1}{2} \ge p > t \ge 0$, 则在引理 2.3.2 (1) 中取 $\delta = 2p$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p-t}} \le B^{p}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\le A^{-\frac{t}{2}}B^{2p}A^{-\frac{t}{2}} \le A^{2p-t}.\end{aligned}$$

(IV) 若 $1 \ge t > p \ge \dfrac{1}{2}$, 则在引理 2.3.2 (2) 中取 $\delta = 2p-1$, 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p-t}} \le B^{p-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{-\frac{t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}} &= A^{-\frac{t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{-\frac{t}{2}} \\ &\le A^{-\frac{t}{2}}B^{2p-1}A^{-\frac{t}{2}} \le A^{2p-1-t}.\end{aligned}$$

2.4 关于负幂的 Furuta 型不等式的推广

本节我们给出负幂的 Furuta 型不等式等价于 Tanahashi 不等式的证明，接着把这个结果推广为一类保序不等式.

首先回忆负幂的 Furuta 型不等式即下面的定理 2.4.A:

定理 2.4.A 如果 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 那么下面的结论成立:

(I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$, $p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}}$;

(II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$, $\frac{1}{2} \geq p$, 则 $A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}}$;

(III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则 $A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}}$;

(IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则 $A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}$.

最近 K. Tanahashi 又得出下列不等式:

定理 2.4.B [82] 若 $A \geq B > 0$, $0 \leq p \leq 1$, $0 < q \leq 1$ 且 $-1 \leq 2r \leq 0$, 则

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \tag{2.4.1}$$

在实数 p, q, r 满足

$$-2r(1-q) \leq p \leq q - 2r(1-q) \tag{2.4.2}$$

和以下条件之一时成立:

$$\frac{1}{2} \leq q \leq 1 \tag{2.4.3}$$

或

$$0 < q < \frac{1}{2}, \quad \frac{-2r(1-q)-q}{1-2q} \leq p \leq \frac{-2r(1-q)}{1-2q}. \tag{2.4.4}$$

在本部分中我们证明了定理 2.4.A 和定理 2.4.B 等价于下面的定理 2.4.1.

定理 2.4.1[105] 若 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则

$$A^{\theta-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \tag{2.4.5}$$

在下面任意一个条件成立时成立：

T_1: $0 \leq t < p \leq \theta \leq \min\{2p, 1\}$;

T_2: $\max\{0, 2p-1\} \leq \theta \leq p < t \leq 1$;

T_3: $0 \leq t < p \leq 1$ 和 $t \leq \theta \leq \min\{2p, 1\}$;

T_4: $0 \leq p < t \leq 1$ 和 $\max\{0, 2p-1\} \leq \theta \leq t$.

如果我们在 (T_1) 中取 $\theta = 1$, 或 $2p$; 在 (T_2) 中取 $\theta = 0$, 或 $2p-1$, 则均可由定理 2.4.1 推出定理 2.4.A；反过来可以用一次 L-H 不等式，则由定理 2.4.A 推出定理 2.4.1, 而且它可以推广为如下的保序不等式：

定理 2.4.2 [105]　若 $A_1 \geq A_2 \geq B > 0$, 则

$$\left(B^r A_1^{\alpha_1} B^r\right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}} \geq \left(B^r A_2^{\alpha_2} B^r\right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}} \tag{2.4.6}$$

在下面任意一个条件成立时成立：

(i) $0 \leq \alpha_2 < -2r < \alpha_1 \leq \min\{-4r, 1\}$ 且

$$-2r \leq \theta \leq \min\{-4r, 1, 2\alpha_1 - \alpha_2\};$$

(ii) $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < -2r \leq 1$ 且

$$\max\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \min\{-4r, 1\}\} \leq \theta \leq -2r;$$

(iii) $\max\{0, -4r-1\} \leq \alpha_1 < -2r < \alpha_2 \leq 1$ 且

$$\max\{2\alpha_1 - \alpha_2, 0, -4r-1\} \leq \theta \leq -2r;$$

(iv) $0 \leq -2r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ 且

$$-2r \leq \theta \leq \min\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \max\{0, -4r-1\}\}.$$

为证明上述结果，我们先引述几个引理.

引理 2.4.A[43]　若 $A > 0$, B 可逆，则

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}}\right)^{s-1}A^{\frac{1}{2}}B^*$$

对任意实数 s 都成立.

引理 2.4.B [98] 令 $A>0$, $B>0$, 且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 是满足下列条件的任意实数：$\alpha_1+r\neq 0$, $\alpha_2+r\neq 0$. 则

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$$

为了证明下面的定理，我们把引理 2.4.B 加强为以下的引理 2.4.C.

引理 2.4.C 令 $A>0$, $B>0$, 且 $\beta, r, \alpha_1, \alpha_2$ 满足下列条件的任意实数：$\alpha_1+r\neq 0$, $\alpha_2+r\neq 0$. 则

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}&\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\\ &\geq \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.\end{aligned}$$

下面我们证明定理 2.4.B 和定理 2.4.1 是等价的.

定理 2.4.B $\Rightarrow$ 定理 2.4.1 (1) 假设 $0\leq t<p\leq\theta\leq\min\{2p,1\}$. 不妨令

$$r=\frac{-t}{2},\quad q=\frac{p-t}{\theta-t},$$

则 $-1\leq 2r\leq 0$, $0<q\leq 1$, 且由 $t\theta\leq p\,\theta\leq p-t+t\theta$ 可知

$$t(\theta-p)\leq p\,(\theta-t)\leq p-t+t(\theta-p).$$

我们可得

$$t\left(1-\frac{p-t}{\theta-t}\right)\leq p\leq\frac{p-t}{\theta-t}+t\left(1-\frac{p-t}{\theta-t}\right).$$

因此 (2.4.2) 成立.

如果 $t+\theta\leq 2p$, 那么 (2.4.3) 成立.

如果 $t+\theta>2p$, 那么 $0<q<\frac{1}{2}$,

$$(2p-1)(p-t)\le(p-t)\theta\le 2p(p-t).$$

则

$$t(\theta-p)-(p-t)\le p(\theta+t-2p)\le t(\theta-p).$$

因此 (2.4.4) 成立.

(2) 假设 $\max\{0,2p-1\}\le\theta<p\le t\le 1$. 不妨令

$$r=\frac{-t}{2},\quad q=\frac{p-t}{\theta-t},$$

那么 $-1\le 2r<0$, $0<q\le 1$. 又由 $t\theta\ge p\theta\ge p-t+t\theta$, 有

$$t(\theta-p)\ge p(\theta-t)\ge p-t+t(\theta-p).$$

故由 $\theta-t<0$, 可知

$$t\left(1-\frac{p-t}{\theta-t}\right)\le p\le\frac{p-t}{\theta-t}+t\left(1-\frac{p-t}{\theta-t}\right).$$

因此 (2.4.2) 成立.

如果 $\theta+t\ge 2p$, 那么 $\frac{1}{2}\le q\le 1$.

如果 $\theta+t<2p$, 那么 $0<q<\frac{1}{2}$,

$$(2p-1)(p-t)\ge(p-t)\theta\ge 2p(p-t),$$

则

$$t(\theta-p)-(p-t)\ge p(\theta+t-2p)\ge t(\theta-p).$$

由 $\theta+t-2p<0$, 我们可得

$$\frac{-2r(1-q)-q}{1-2q}\le p\le\frac{-2r(1-q)}{1-2q}.$$

因此 (2.4.4) 成立. 由定理 2.4.B, (2) 得证.

(3) 假设 $0\le t<p\le 1$, $t\le\theta\le\min\{2p,1\}$. 由 (1), 我们只需证明在 $t\le\theta\le p$ 的条件下定理成立. 取 θ_1 满足 $0\le t<p\le\theta_1\le\min\{2p,1\}$. 由 (1), 我们可得

$$A^{\theta_1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta_1-t}{p-t}}.$$

因为 $\dfrac{\theta-t}{\theta_1-t} \in [0,1]$, 所以由 Löwner-Heinz 定理即得 (2.4.5).

(4) 仿照 (3) 的证明即得 (T_4).

定理 2.4.1 $\Rightarrow$ 定理 2.4.B 令

$$r=-\frac{t}{2}, \quad q=\frac{p-t}{\theta-t}.$$

(1) 假设 $\theta > t$. 由 (2.4.2), 我们可得

$$t\left(\frac{\theta-p}{\theta-t}\right) \leq p \leq \frac{p-t+t(\theta-p)}{\theta-t}.$$

于是 $t\theta \leq p\theta \leq p-t+t\theta$. 因此, $t \leq p$, $\theta \leq 1$.

如果 (2.4.3) 成立, 我们可得 $\dfrac{\theta+t}{2} \leq p \leq \theta$. 由于 $t=p$, 可以推出 $t=\theta$. 所以 $0 \leq t < p \leq \theta \leq 1$, $\theta \leq 2p-t \leq 2p$. 由定理 2.4.1 的 (T_1), (2.4.1) 得证.

如果 (2.4.4) 成立, 我们可得

$$t < p \leq \frac{\theta+t}{2}, \quad \frac{t(\theta-p)-(p-t)}{\theta+t-2p} \leq p \leq \frac{t(\theta-p)}{\theta+t-2p}.$$

又 $\theta+t-2p>0$, $p-t>0$, 则 $2p-t \leq \theta \leq 2p$. 因此

$$0 \leq t < p \leq 1, \quad t \leq 2p-t \leq \theta \leq \min\{1, 2p\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3), (2.4.1) 得证.

(2) 假设 $\theta < t$. 由 (2.4.2), 得

$$t\theta \geq p\,\theta \geq p-t+t\theta.$$

如果 (2.4.3) 成立, 则 $\dfrac{\theta+t}{2} \geq p \geq \theta$. 所以

$$\theta \leq p < t \leq 1, \quad 0 \leq \theta, \quad t \geq 2p-t \geq 2p-1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2), (2.4.1) 得证.

如果 (2.4.4) 成立, 我们可得

$$t > p > \frac{\theta+t}{2}, \quad \frac{t(\theta-p)-(p-t)}{\theta+t-2p} \le p \le \frac{t(\theta-p)}{\theta+t-2p}.$$

由 $\theta+t-2p<0$, $p-t<0$, 得 $2p-1\le\theta\le 2p$. 所以

$$0\le p<t\le 1, \quad \max\{0,2p-1\}\le\theta<t.$$

又由定理 2.4.1 的 (T_4), (2.4.1) 得证.

定理 2.4.2 的证明 (1) 假设条件 (i) 成立. 不妨设 $\theta_1=\min\{-4r,1\}$, 则

$$0\le\alpha_2<-2r\le\theta_1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_1), 可得

$$\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-2r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{-2r-\alpha_2}}\le A_2^{\theta_1-\alpha_2}. \tag{2.4.7}$$

记

$$X=\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{2r+\alpha_2}}.$$

又由 $0\le\alpha_2<\alpha_1<\theta_1\le\min\{2\alpha_1,1\}$ 和定理 2.4.1 的 (T_1), 可得

$$A_2^{\theta_1-\alpha_2}\le\left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}}.$$

记 $Y=\left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{\alpha_1-\alpha_2}}$, 则 $Y\le X$. 令

$$R=\frac{\alpha_2+2r}{\alpha_2-\theta_1}, \quad P=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\theta_1}, \quad \theta_2=\frac{\alpha_2-\theta}{\alpha_2-\theta_1}.$$

那么由 $\alpha_2<-2r<\alpha_1\le\theta_1$ 可得 $0<R<P\le 1$, 又由 $-2r\le\theta\le\min\{2\alpha_1-\alpha_2,\theta_1\}$ 可得 $R\le\theta_2\le\min\{2P,1\}$. 于是

$$0<R<P\le 1, \quad R\le\theta_2\le\min\{2P,1\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3), 可知

$$\left(X^{\frac{-R}{2}}Y^PX^{\frac{-R}{2}}\right)^{\frac{\theta_2-R}{P-R}}\le X^{\theta_2-R}.$$

所以

$$\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}}$$

$$\geq\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \tag{2.4.8}$$

由 (2.4.8) 和引理 2.4.C, 即得 (2.4.6).

(2) 假设条件 (ii) 成立. 令 $\theta_1=\min\{-4r,1\}$, 则 $0\leq\alpha_2<-2r\leq\theta_1$. 由定理 2.4.1 的 (T_1), 可得

$$\left(A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-2r}A_1^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{-2r-\alpha_2}}\leq A_1^{\theta_1-\alpha_2}.$$

记

$$X=\left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2-\theta_1}{2r+\alpha_2}}\geq A_1^{\alpha_2-\theta_1}=Y. \tag{2.4.9}$$

记

$$R=\frac{\alpha_2+2r}{\alpha_2-\theta_1},\quad P=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\theta_1},\quad \theta_2=\frac{\alpha_2-\theta}{\alpha_2-\theta_1}.$$

则由 $\alpha_2<\alpha_1<-2r\leq\theta_1$, 可得 $0\leq P<R\leq1$, 由 $\max\{\alpha_2,2\alpha_1-\theta_1\}\leq\theta\leq-2r$, 可得

$$\max\{0,2P-1\}\leq\theta_2\leq R.$$

因此定理 2.4.1 的 (T_4) 的条件得以满足, 则

$$\left(X^{\frac{-R}{2}}Y^PX^{\frac{-R}{2}}\right)^{\frac{\theta_2-R}{P-R}}\leq X^{\theta_2-R}.$$

所以

$$\left[\left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_1^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}}$$

$$\geq\left(A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{2r}A_1^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \tag{2.4.10}$$

由 (2.4.10) 和引理 2.4.B, 可得

$$(B^rA_1^{\alpha_1}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_1+2r}}\geq(B^rA_1^{\alpha_2}B^r)^{\frac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}}. \tag{2.4.11}$$

因为 $0\leq\dfrac{\theta+2r}{\alpha_2+2r}\leq1$, $0\leq\alpha_2\leq1$, 由 L-H 不等式和 (2.4.11) 可得 (2.4.6).

(3) 假设条件 (iii) 成立. 设 $\theta_1 = \max\{-4r-1, 0\}$, 则

$$\theta_1 \leq -2r < \alpha_2 \leq 1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2), 即得 (2.4.7). 又由 $\max\{0, 2\alpha_1 - 1\} \leq \theta_1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ 和定理 2.4.1 的 (T_2), 可得

$$A_2^{\theta_1-\alpha_2} \leq \left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\theta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}}.$$

此处若 X, Y 的记法和 (1) 一样, 则 $Y \leq X$. 令 R, P 和 θ_2 的记法也和 (1) 一样, 则由 $\alpha_2 > -2r > \alpha_1 \geq \theta_1$ 可以推得 $0 < R < P \leq 1$, 由 $-2r \geq \theta \geq \max\{2\alpha_1 - \alpha_2, \theta_1\}$, 可以推得 $R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}$, 即

$$0 < R < P \leq 1, \quad R \leq \theta_2 \leq \min\{2P, 1\}.$$

由定理 2.4.1 的 (T_3), (2.4.8) 得证, 由 (2.4.8) 和引理 2.4.C, 又可得 (2.4.6).

(4) 假设条件 (iv) 成立. 不妨设 $\theta_1 = \max\{-4r-1, 0\}$, 则

$$\max\{-4r-1, 0\} = \theta_1 \leq -2r < \alpha_2 \leq 1.$$

由定理 2.4.1 的 (T_2), 得 (2.4.9). 同上此处 X, Y 的记法和 (2) 一样, 则 $Y \leq X$. 令 R, P 和 θ_2 的记法也和 (2) 一样, 则由 $\theta_1 \leq -2r < \alpha_1 \leq \alpha_2$ 可以推得 $0 \leq P < R \leq 1$, 且

$$-2r \leq \theta \leq \min\{\alpha_2, 2\alpha_1 - \theta_1\}, \quad \max\{0, 2P-1\} \leq \theta_2 \leq R.$$

由定理 2.4.1 的 (T_4), 又可推出 (2.4.10), 由 (2.4.10) 和引理 2.4.B, 可得 (2.4.11). 又因为

$$0 \leq \frac{\theta + 2r}{\alpha_2 + 2r} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 1,$$

由 L-H 不等式和 (2.4.11), 可得 (2.4.6).

注　我们说定理 2.4.2 是定理 2.4.1 的推广.

若在定理 2.4.2 中取 $A_1 = A_2 = A$, 并在 (i) (或 (iii)) 中令

$$\alpha_1 = \theta, \quad r = \frac{-p}{2}, \quad \alpha_2 = t,$$

则由 (i) (或 (iii)) 可得 (T_1) (或 (T_2)), 由 (2.4.6) 可以推出

$$B^{\frac{-p}{2}} A^{\theta} B^{\frac{-p}{2}} \geq \left(B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}}\right)^{\frac{\theta-p}{t-p}}.$$

再由引理 2.4.A, 得 (2.4.5).

如果在 (ii) 中取 $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = p$, $r = \dfrac{-t}{2}$, 则 (ii) 变为

$$0 \le p < t \le 1, \quad \max\{0, 2p - \min\{2t, 1\}\} \le \theta \le t.$$

而由 $0 \le p < t \le 1$, 得

$$\max\{0, 2p - \min\{2t, 1\}\} = \max\{0, 2p - 1\}.$$

所以我们说, (ii) 可推出 (T_3), 且 (2.4.6) 等价于

$$\left(B^{\frac{-t}{2}} A^p B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \ge B^{\theta-t}. \tag{2.4.12}$$

因此, 由 $B^{-1} \ge A^{-1} > 0$ 和 (2.4.12) 可得 (2.4.5).

如果在 (iv) 中取 $\alpha_2 = 1$, $r = -\dfrac{t}{2}$, $\alpha_1 = p$, 则得

$$0 \le t < p \le 1, \quad t \le \theta \le \min\{1, 2p - \max\{0, 2t - 1\}\}.$$

而由 $0 \le t < p \le 1$, 得

$$\min\{1, 2p - \max\{0, 2t - 1\}\} = \min\{2p, 1\}.$$

所以 (iv) 可推出 (T_4), (2.4.6) 可以推出

$$\left(B^{\frac{-t}{2}} A^p B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{p-t}} \ge \left(B^{\frac{-t}{2}} A B^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{\theta-t}{1-t}} \ge B^{\theta-t}. \tag{2.4.13}$$

因此, 由 $B^{-1} \ge A^{-1} > 0$ 和 (2.4.13) 可得 (2.4.5).

推论 2.4.1 如果 $A_1 \ge A_2 \ge B > 0$, 那么 (2.4.6) 在下面任一条件成立时成立:

(i) $-\dfrac{1}{2} \le r \le -\dfrac{1}{4}$, $0 \le \alpha_2 < -2r < \alpha_1 \le 1$ 且

$$-2r \le \theta \le \min\{1, 2\alpha_1 - \alpha_2\};$$

(ii) $-\dfrac{1}{2} \le r \le -\dfrac{1}{4}$, $0 \le \alpha_2 \le \alpha_1 < -2r \le 1$ 且

$$\max\{\alpha_2, 2\alpha_1 - 1\} \le \theta \le -2r;$$

(iii) $-\frac{1}{4} \le r \le 0,\ 0 \le \alpha_1 < -2r < \alpha_2 \le 1$ 且

$$\max\{2\alpha_1 - \alpha_2, 0\} \le \theta \le -2r;$$

(iv) $-\frac{1}{4} \le r \le 0,\ 0 \le -2r < \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ 且

$$-2r \le \theta \le \min\{\alpha_2, 2\alpha_1\}.$$

2.5 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式

定理 2.5.1 (Kantorovich 不等式) 设 A 是 H 上的正算子, $0 \le m \le A \le M$, 则对 H 中每个单位向量 x 有

(1) $(Ax, x)(A^{-1}x, x) \le \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}$;

(2) $(A^2x, x) \le \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}(Ax, x)^2$.

证 (1) 由于

$$0 \le (MI - A)A^{-1}(A - mI) = MI - A - MmA^{-1} + mI,$$

故对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned} m + M &\ge (Ax, x) + mM(A^{-1}x, x) \\ &\ge 2\sqrt{mM(Ax, x)(A^{-1}x, x)}, \end{aligned}$$

从而 (1) 成立.

(2) 由 (1) 知,

$$\left(A\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}\right)\left(A^{-1}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}, \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\|A^{\frac{1}{2}}x\|}\right) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$

从而

$$(A^2x, x)(x, x) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|^4,$$

因此 (2) 成立.

注 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ 称为 **Kantorovich 常数**，它是 m, M 的算术平均数与几何平均数之比的平方，并且易知该定理 2.5.1 中 (1) 和 (2) 等价.

定理 2.5.2 (Hölder-McCarthy 不等式) 设 A 是 H 上的正算子，则

(1) 对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda > 1$, 有 $(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda$;

(2) 对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda \in [0,1]$, 有 $(A^\lambda x, x) \leq (Ax, x)^\lambda$;

(3) 当 A 可逆时，对 H 中每个单位向量 x 及 $\lambda < 0$, 有

$$(A^\lambda x, x) \geq (Ax, x)^\lambda.$$

证 先证 (2). 显见 (2) 对 $\lambda = 0, 1$ 成立，下证若 (2) 对某 $\alpha, \beta \in [0,1]$ 成立，则它对 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 亦成立. 事实上，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}x, x\right)\right|^2 &= \left|\left(A^{\frac{\alpha}{2}}x, A^{\frac{\beta}{2}}x\right)\right|^2 \leq (A^\alpha x, x)(A^\beta x, x) \\ &\leq (Ax, x)^\alpha (Ax, x)^\beta = (Ax, x)^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

故由算子的连续性，知 (2) 的结论成立.

其次证 (1). 如果 $\lambda > 1$, 则由 (2) 对 H 中每个单位向量 x 有

$$(Ax, x) = (A^{\lambda\frac{1}{\lambda}}x, x) \leq (A^\lambda x, x)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

故 (1) 成立.

最后证 (3). 对 H 中每个单位向量 x 有

$$1 = \left|\left(A^{\frac{1}{2}}x, A^{-\frac{1}{2}}x\right)\right|^2 \leq \left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|^2 \left\|A^{-\frac{1}{2}}x\right\|^2 = (Ax, x)(A^{-1}x, x).$$

故 (3) 对 $\lambda = -1$ 时成立.

如果 $\lambda < -1$, 则由 (1) 知，对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned}(A^\lambda x, x) &= (A^{-|\lambda|}x, x) \geq (A^{-1}x, x)^{|\lambda|} \\ &\geq (Ax, x)^{-|\lambda|} = (Ax, x)^\lambda.\end{aligned}$$

如果 $-1 \leq \lambda < 0$, 则由 (2) 知，对 H 中每个单位向量 x 有

$$\begin{aligned}(A^\lambda x, x) &= (A^{-|\lambda|}x, x) \geq (A^{|\lambda|}x, x)^{-1} \\ &\geq (Ax, x)^{-|\lambda|} = (Ax, x)^\lambda.\end{aligned}$$

注　Hölder-McCarthy 不等式与下述的 **Young 不等式** 等价[37]:

$$\lambda A + I - \lambda \geq A^{\lambda}.$$

事实上, 易见有不等式 $\lambda a + 1 - \lambda \geq a^{\lambda}$, 其中 $a \geq 0$, $\lambda \in [0,1]$.
(H-M) $\Rightarrow$ (Young). 对单位向量 x 和 $\lambda \in [0,1]$, 由 $(Ax,x) \geq 0$ 有

$$\lambda(Ax,x) + 1 - \lambda \geq (Ax,x)^{\lambda} \geq (A^{\lambda}x,x).$$

(Young) $\Rightarrow$ (H-M). 设 $\lambda \in (0,1]$, $(Ax,x) \neq 0$. 在 Young 不等式中, 用 $(Ax,x)^{-1}A$ 代替 A, 可得 Hölder-McCarthy 不等式. 如果 $(Ax,x) = 0$, 则 $A^{\frac{1}{2}}x = 0$, 故 $A^{\lambda}x = 0$, 从而 Hölder-McCarthy 不等式仍成立.

下面考虑 Kantorovich 不等式和 Hölder-McCarthy 不等式的推广, 为此先给出下面的引理:

引理 2.5.1　设 $0 < m < M$,

$$h(t) = \frac{1}{t^q}\left[k + \frac{K-k}{M-m}(t-m)\right]$$

是定义在区间 $[m,M]$ 上的一个函数, 其中 $q \neq 0,1$; K,k 是任意实数. 则当 m,M,K,k 及 q 满足下列 (i) 或 (ii) 时, $h(t)$ 在区间 $[m,M]$ 上的最大值为

$$\frac{mK - Mk}{(q-1)(M-m)}\left[\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK-Mk)}\right]^q,$$

其中

(i) $K > k$, $\dfrac{K}{M} \geq \dfrac{k}{m}$, $q > 1$ 及 $\dfrac{k}{m}q \leq \dfrac{K-k}{M-m} \leq \dfrac{K}{M}q$;

(ii) $K < k$, $\dfrac{K}{M} \leq \dfrac{k}{m}$, $q < 0$ 及 $\dfrac{k}{m}q \leq \dfrac{K-k}{M-m} \leq \dfrac{K}{M}q$.

证　事实上, 在 (i) 或 (ii) 条件下, $h(t)$ 在 $[m,M]$ 上只有一个稳定点 $t_1 = \dfrac{q(mK-Mk)}{(q-1)(K-k)}$, 且 $h'(t)$ 在 $[m,t_1]$ 上大于 0, 在 $[t_1,M]$ 上小于 0, 从而它在该点处达到最大值.

定理 2.5.3[34]　设 A 是 H 上的正算子, 且 $0 < m \leq A \leq M$, $f(t)$ 是区

间 $[m,M]$ 上的连续凸函数，则在下列条件 (i) 或 (ii) 成立时，对每个单位向量 x 有

$$(f(A)x,x) \le \frac{mf(M)-Mf(m)}{(q-1)(M-m)}\left[\frac{(q-1)(f(M)-f(m))}{q(mf(M)-Mf(m))}\right]^q (Ax,x)^q,$$

其中

(i) $f(M)>f(m)$, $\dfrac{f(M)}{M}\ge\dfrac{f(m)}{m}$, $q>1$ 及

$$\frac{f(m)}{m}q\le\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\le\frac{f(M)}{M}q;$$

(ii) $f(M)<f(m)$, $\dfrac{f(M)}{M}\le\dfrac{f(m)}{m}$, $q<0$ 及

$$\frac{f(m)}{m}q\le\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\le\frac{f(M)}{M}q.$$

证 由于 $f(t)$ 是区间 $[m,M]$ 上的连续凸函数，故在区间 $[m,M]$ 有

$$f(t)\le f(m)+\frac{f(M)-f(m)}{M-m}(t-m),$$

从而对 H 中每个单位向量 x 有

$$(f(A)x,x)\le f(m)+\frac{f(M)-f(m)}{M-m}((Ax,x)-m).$$

令

$$h(t)=\frac{1}{t^q}\left[f(m)+\frac{f(M)-f(m)}{M-m}(t-m)\right],$$

则有

$$\begin{aligned}(f(A)x,x) &\le (Ax,x)^{-q}\left[f(m)+\frac{f(M)-f(m)}{M-m}((Ax,x)-m)\right](Ax,x)^q\\ &\le \max\{h(t):m\le t\le M\}(Ax,x)^q.\end{aligned}$$

应用引理 2.5.1 可知结论成立.

如果 $p\notin[0,1]$，则 $f(t)=t^p$ 是区间 $[m,M]$ 上的连续凸函数，故可应用定理 2.5.3 得

推论 2.5.1 设 A 是 H 上的正算子，且 $0<m\leq A\leq M$，则在下列条件 (i) 或 (ii) 成立时，对每个单位向量 x 有

$$(A^p x,x)\leq \frac{mM^p-Mm^p}{(q-1)(M-m)}\left[\frac{(q-1)(M^p-m^p)}{q(mM^p-Mm^p)}\right]^q (Ax,x)^q,$$

其中

(i) $m^{p-1}q\leq \dfrac{M^p-m^p}{M-m}\leq M^{p-1}q,\ p>1,\ q>1;$

(ii) $m^{p-1}q\leq \dfrac{M^p-m^p}{M-m}\leq M^{p-1}q,\ p<0,\ q<0.$

在上述推论 2.5.1 (i) 中，令 $p=2$，q 用 $p+1$ 代替； (ii) 中令 $p=-1$，q 用 $-p$ 代替，又有

推论 2.5.2 设 A 是 H 上的正算子，且 $0<m\leq A\leq M$，$\dfrac{m}{M}\leq p\leq \dfrac{M}{m}$，则对每个单位向量 x 有

(1) $(Ax,x)^p(A^{-1}x,x)\leq \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}}\dfrac{(m+M)^{p+1}}{mM};$

(2) $(A^2x,x)\leq \dfrac{p^p}{(p+1)^{p+1}}\dfrac{(m+M)^{p+1}}{(mM)^p}(Ax,x)^{p+1}.$

在推论 2.5.1 中，令 $q=p$，并应用 Hölder-McCarthy 不等式可得

定理 2.5.4 设 $p>1$，A 是 H 上的正算子，且 $0<m\leq A\leq M$，

$$m^{p-1}p\leq \frac{M^p-m^p}{M-m}\leq M^{p-1}p,$$

则对每个单位向量 x 有

(1) 如果 $p>1$，则

$$(Ax,x)^p\leq (A^p x,x)\leq K_+(m,M,p)(Ax,x)^p,$$

其中 $K_+(m,M,p)=\dfrac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\dfrac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-Mm^p)^{p-1}};$

(2) 如果 $p<0$，则

$$(Ax,x)^p\leq (A^p x,x)\leq K_-(m,M,p)(Ax,x)^p,$$

其中 $K_-(m,M,p)=\dfrac{mM^p-Mm^p}{(p-1)(M-m)}\left[\dfrac{(p-1)(M^p-m^p)}{p(mM^p-Mm^p)}\right]^p$.

应用定理 2.5.4, 又有

推论 2.5.3 设 A,B 是 H 上的正算子, 且

$$0<m_1\le A\le M_1,\quad 0<m_2\le B\le M_2,$$

p,q 是一对共轭实数即满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则对每个单位向量 x 和任意实数 s,r,

(1) 当 $p>1,\ q>1,\ r\ge 0,\ s\ge 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x\right)&\le (A^sx,x)^{\frac{1}{p}}(B^rx,x)^{\frac{1}{q}}\\&\le K_+\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},\frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},p\right)^{\frac{1}{p}}\left(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x\right);\end{aligned}$$

(2) 当 $p<0,\ 0<q<1,\ r\ge 0,\ s\le 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x\right)&\ge (A^sx,x)^{\frac{1}{p}}(B^rx,x)^{\frac{1}{q}}\\&\ge K_-\left(\frac{m_1^{\frac{s}{p}}}{m_2^{\frac{r}{p}}},\frac{M_1^{\frac{s}{p}}}{M_2^{\frac{r}{p}}},p\right)^{\frac{1}{p}}\left(B^r\sharp_{\frac{1}{p}}A^sx,x\right),\end{aligned}$$

其中 $K_+(\ ,\ ,\ ),K_-(\ ,\ ,\ )$ 如定理 2.5.4 中所定义.

证 (1) 由定理 2.5.4, 对每个向量 x 有

$$(Ax,x)\le (A^px,x)^{\frac{1}{p}}(x,x)^{\frac{1}{q}}\le K_+(m,M,p)^{\frac{1}{p}}(Ax,x).\tag{2.5.1}$$

另一方面又有

$$M_2^{-r}m_1^s\le m_1^sB^{-r}\le B^{-\frac{r}{2}}A^sB^{-\frac{r}{2}}\le M_1^sB^{-r}\le M_1^sm_2^{-r},$$

由 L-H 不等式有

$$m_1^{\frac{s}{p}}M_2^{-\frac{r}{p}}\le\left(B^{-\frac{r}{2}}A^sB^{-\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\le M_1^{\frac{s}{p}}m_2^{-\frac{r}{p}}.$$

在 (2.5.1) 式中，令 A 为 $\left(B^{-\frac{r}{2}}A^sB^{-\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$，$x$ 为 $B^{\frac{r}{2}}x$ 即可得 (1).

(2) 类似 (1) 可证.

作为定理 2.5.4 的另一个应用，我们来看一下当 $A \geq B > 0$, $p > 1$ 时 A^p 与 B^p 的关系.

引理 2.5.2 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 如果 $t > 1$, 则

(1) $0 \leq (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1$, 且等号成立的充要条件为 $t = 1$;

(2) $\dfrac{t^{\frac{1}{p}}(t-1)}{t(t^{\frac{1}{p}}-1)} \leq p$, 且等号成立的充要条件为 $t \downarrow 1$;

(3) $\dfrac{t-1}{(t^{\frac{1}{p}}-1)^{\frac{1}{p}}(t^{\frac{1}{q}}-1)^{\frac{1}{q}}t^{\frac{2}{pq}}} \leq p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}$，且等号成立的充要条件为 $t \downarrow 1$;

(4) $\dfrac{(p-1)^{p-1}(t^p-1)^p}{p^p(t-1)(t^p-t)^{p-1}} \leq t^{p-1}$, 且等号成立的充要条件为 $t \downarrow 1$.

证 (1) 令 $f(t) = (p-1)t - pt^{\frac{1}{q}} + 1$, 则 $f(1) = 0$,

$$f'(t) = (p-1)(1 - t^{-\frac{1}{p}}) \geq 0,$$

故结论成立.

(2) 由 (1) 得 $0 \leq (p-1)t - pt^{1-\frac{1}{p}} + 1$, 故

$$0 \leq (p-1)t \cdot t^{\frac{1}{p}} - pt + t^{\frac{1}{p}},$$

即 $(t-1)t^{\frac{1}{p}} \leq pt(t^{\frac{1}{p}} - 1)$, 从而 (2) 成立.

(3) 由 (2) 可得.

(4) 在 (3) 中，把 t 换为 t^p 即可.

定理 2.5.5 设 A, B 是 H 上的正算子，且 $p \geq 1$, $0 < m_1 \leq A \leq M_1$, $0 < m_2 \leq B \leq M_2$, $0 < B \leq A$, 则

(1) $B^p \leq K_{2,p}A^p \leq \left(\dfrac{M_2}{m_2}\right)^{p-1} A^p$;

(2) $B^p \le K_{1,p}A^p \le \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1} A^p,$

其中

(i) $K_{1,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_1-m_1)}\frac{(M_1^p-m_1^p)^p}{(m_1M_1^p-M_1m_1^p)^{p-1}}$;

(ii) $K_{2,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_2-m_2)}\frac{(M_2^p-m_2^p)^p}{(m_2M_2^p-M_2m_2^p)^{p-1}}$.

证 只要考虑 $p>1$ 的情形. 当 $M \ge m > 0$ 时, 在引理 2.5.2 中, 令 $t=\frac{M}{m}\ge 1$, 则

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-Mm^p)^{p-1}} \le \left(\frac{M}{m}\right)^{p-1}. \tag{2.5.2}$$

当 $p>1$ 时, 应用定理 2.5.4, Hölder-McCarthy 不等式及 (2.5.2) 得

$$\begin{aligned}(B^px,x) &\le K_{2,p}(Bx,x)^p \le K_{2,p}(Ax,x)^p \le K_{2,p}(A^px,x)\\ &\le \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1}(A^px,x).\end{aligned}$$

故 (1) 得证.

又因 $0<A^{-1}\le B^{-1}$, 且 $M_1^{-1}\le A^{-1}\le m_1^{-1}$, 故应用 (1) 得

$$\begin{aligned}A^{-p} &\le \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p\left(m_1^{-1}-M_1^{-1}\right)}\frac{\left(m_1^{-p}-M_1^{-p}\right)^p}{\left(M_1^{-1}m_1^{-p}-m_1^{-1}M_1^{-p}\right)^{p-1}}B^{-p}\\ &= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_1-m_1)}\frac{\left(M_1^p-m_1^p\right)^p}{\left(m_1M_1^p-M_1m_1^p\right)^{p-1}}B^{-p}\\ &= K_{1,p}B^{-p} \le \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1}B^{-p}.\end{aligned}$$

定理 2.5.5 蕴含了下面的结果:

推论 2.5.4 设 $0<B\le A$ 且 $0<m\le B\le M$. 则对 $p\ge 1$ 有

$$B^p \le \left(\frac{M}{m}\right)^p A^p.$$

第三章　Furuta型不等式条件的最优性

3.1　L-H 不等式及 Furuta 不等式的最优性

首先我们指出对任意一个固定的 $\alpha > 1$, $A \geq B \geq 0$ 不能蕴含 $A^\alpha \geq B^\alpha$. 事实上, 令

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $A \geq B \geq 0$, 且

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

其中

$$\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad \mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \quad b = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

计算可得

$$A^\alpha - B^\alpha = \begin{pmatrix} a^2\lambda^\alpha + b^2\mu^\alpha - 1 & -ab(\lambda^\alpha - \mu^\alpha) \\ -ab(\lambda^\alpha - \mu^\alpha) & b^2\lambda^\alpha + a^2\mu^\alpha \end{pmatrix},$$

从而它的行列式的值为 $g(\alpha) = 1 - (b^2\lambda^\alpha + a^2\mu^\alpha)$. 由于

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= -(a^2\mu^{2\alpha} - b^2)\frac{\ln\mu}{\mu^\alpha} \leq -(a^2\mu^2 - b^2)\frac{\ln\mu}{\mu^\alpha} \\ &= -(5+3\sqrt{5})\frac{\ln\mu}{10\mu^\alpha} < 0, \end{aligned}$$

又 $g(1) = 0$, 故当 $\alpha > 1$ 时, $g(\alpha) < 0$. 因此结论成立.

该结果也可以用反证法证明．假设对某 $\alpha > 1$ 有

$$A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^\alpha \geq B^\alpha,$$

那么对

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

重复应用假设应有 $A^{\alpha^n} \geq B^{\alpha^n}$．取 n 使得 $\alpha^n \geq 2$, 则由 L-H 不等式得 $A^2 \geq B^2$, 但是

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

从而 $A^2 - B^2$ 不是正算子．

其次回忆 Furuta 不等式如下：

定理 F (Furuta 不等式) 设 $A \geq B \geq 0$, 则

(1) $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$;

(2) $A^{\frac{p+2r}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}}$,

其中 $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$, 且 $(1+2r)q \geq p+2r$.

K. Tanahashi 在 [80] 中证明了 Furuta 不等式条件的最优性，即下述定理：

定理 3.1.1 设 $0 < p, q, r \in \mathbf{R}$. 如果 $(1+2r)q < p+2r$ 或 $0 < q < 1$, 则存在 $A, B \in L(\mathbf{R}^2)$ 使得 $0 \leq B \leq A$, 但不满足

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}. \tag{3.1.1}$$

证 我们考虑矩阵算子 A, B 如下：

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{3.1.3}$$

其中

$$a > 1 > b > 0, \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad \varepsilon(1-b) = \delta(a-1). \tag{3.1.4}$$

易见 $0 \le B \le A$, 我们只需对某些 $a, b, \varepsilon, \delta$ 有 A, B 不满足 (3.1.1).

令 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$ 及

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

其中 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$. 则 U 是一个酉算子，而且

$$U^* A U = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & 0 \\ 0 & b+\delta \end{pmatrix}.$$

如果 A, B 满足 (3.1.1), 则

$$(U^* A^r U U^* B^p U U^* A^r U)^{\frac{1}{q}} \le U^* A^{\frac{p+2r}{q}} U.$$

故

$$\gamma^{-\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{q}} \le \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \end{pmatrix}, \tag{3.1.5}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= (a+\varepsilon)^{2r}(a-b-\delta+\varepsilon b^p), \\ A_2 &= (b+\delta)^{2r}[\varepsilon + (a-b-\delta)b^p], \\ A_3 &= (a+\varepsilon)^r(b+\delta)^r(1-b^p)\sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}. \end{aligned}$$

如果令

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

其中

$$2\varepsilon_1 = -A_1 + A_2 + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2},$$

则 V 是酉矩阵，且

$$V^*DV = \begin{pmatrix} A_1 + \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & A_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix},$$

因此由 (3.1.5) 可得

$$\gamma^{-\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix} \leq \frac{1}{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
B_1 &= (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1) + (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \varepsilon_1, \\
B_2 &= (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \varepsilon_1 + (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1), \\
B_3 &= \left[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\right] \sqrt{\varepsilon_1 (A_1 - A_2 + \varepsilon_1)}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
0 \leq & \left| \gamma^{\frac{1}{q}} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} - (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1) \right. \\
& \left. \cdot \begin{pmatrix} (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} & 0 \\ 0 & (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix} \right| \\
= & (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1) \Big[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1) \gamma^{\frac{2}{q}} \\
& - (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1)(A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
& - (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} \varepsilon_1 (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} \varepsilon_1 (A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
& - (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}} \gamma^{\frac{1}{q}} (A_1 - A_2 + \varepsilon_1)(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \\
& + (A_1 - A_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1)(A_1 + \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} (A_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1)\Big\{(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\Big[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\quad \cdot\Big[(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big] + \varepsilon_1\Big[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\quad \cdot\Big[(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

由于 $A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 > 0$, 我们可得下列关键的不等式:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \Big[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big]\Big[(A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} - (b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\quad \le (A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\Big[(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\qquad \cdot\Big[(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} - (A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}\Big]. \qquad (3.1.6)
\end{aligned}
$$

下面估计 (3.1.6) 中每一项关于 ε 及 δ 的阶数. 若用 o 表示 ε 或 δ 的高价无穷小, 则

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a^{2r}(a-b)\left[1 + \left(\frac{2r}{a} + \frac{b^p}{a-b}\right)\varepsilon - \frac{\delta}{a-b} + o\right], \\
A_2 &= b^{p+2r}(a-b)\left[1 + \frac{\varepsilon}{b^p(a-b)} + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right], \\
A_3^2 &= (ab)^{2r}(a-b)(1-b^p)^2\varepsilon \\
&\quad \cdot\left[1 + \frac{2r}{a}\varepsilon + \left(\frac{2r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\right], \\
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4A_3^2}{(A_1-A_2)^2}}\right] \\
&= \frac{a^{2r}b^{2r}(1-b^p)^2\varepsilon}{a^{2r} - b^{p+2r}}\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right),
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}} &= (a-b)^{\frac{1}{q}} b^{\frac{p+2r}{q}}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{q(a-b)} \\
&\quad + \frac{1}{q}\left(\frac{p+2r}{b} - \frac{1}{a-b}\right)\delta + o\Big],
\end{aligned}
$$

$$(A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}=(a-b)^{\frac{1}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}}\left[1+\frac{2a^{2r}-b^pa^{2r}-b^{2r}}{q(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})}\varepsilon+\frac{1}{q}\left(\frac{2r}{b}-\frac{1}{a-b}\right)\delta+o\right].$$

故

$$(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}-(A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}=(a-b)^{\frac{1}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}}\varepsilon\cdot\left[-\frac{(1-b^p)(a^{2r}-b^{2r})}{q(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})}+\frac{p\delta}{qb\varepsilon}+\frac{o}{\varepsilon}\right],$$

$$(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}-(A_2-\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}=(a-b)^{\frac{1}{q}}\left(a^{\frac{p+2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}}\right)\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}-(b+\delta)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}=(a-b)^{\frac{1}{q}}\left(a^{\frac{2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}}\right)\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right),$$

$$(a+\varepsilon)^{\frac{p+2r}{q}}\gamma^{\frac{1}{q}}-(A_1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{q}}=(a-b)^{\frac{1}{q}}a^{\frac{2r}{q}}(a^{\frac{p}{q}}-1)\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right).$$

所以 (3.1.6) 可化为

$$\begin{aligned}&(ab)^{2r}(1-b^p)^2\left(a^{\frac{p+2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}}\right)\left(a^{\frac{2r}{q}}-b^{\frac{p+2r}{q}}\right)\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)\\&\le a^{\frac{2r}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}}(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})^2\left(a^{\frac{p}{q}}-1\right)\\&\cdot\left[-\frac{(1-b^p)(a^{2r}-b^{2r})}{q(a-b)(a^{2r}-b^{p+2r})}+\frac{p\delta}{qb\varepsilon}+\frac{o}{\varepsilon}\right].\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

令 $\delta=\dfrac{1-b}{a-1}\varepsilon$ 于 (3.1.7) 中，并令 $\varepsilon\to 0^+$ 得

$$\begin{aligned}&q(1-a^{-1})(1-b^p)^2\left(1-a^{-\frac{p+2r}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}}\right)\left(1-a^{-\frac{2r}{q}}b^{\frac{2r+p}{q}}\right)\\&\le a^{\frac{2r(q-1)}{q}}b^{\frac{p+2r}{q}-2r-1}(1-a^{-2r}b^{p+2r})\left(1-a^{-\frac{p}{q}}\right)\\&\cdot\Big[p(1-b)(1-a^{-1}b)(1-a^{-2r}b^{p+2r})\\&-b(1-b^p)(1-a^{-1})(1-a^{-2r}b^{2r})\Big].\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

如果 $0<q<1$, 在 (3.1.8) 中令 $a\to+\infty$, 可得 $0<q(1-b^p)^2\le 0$. 故矛

盾. 如果 $(1+2r)q<p+2r$, 在 (3.1.8) 中令 $b\to 0^+$, 可得 $0<q(1-a^{-1})\le 0$. 故亦矛盾.

注 如果考虑的空间是复空间, 当 $(1+2r)q<p+2r$ 时, 有下列更简单的例子:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{c(1-c)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ 2\sqrt{c(1-c)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & 4c \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $0<c<1$. 然后令酉矩阵 V 为

$$V=\begin{pmatrix} \sqrt{1-c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & \sqrt{c} \\ \sqrt{c} & -\sqrt{1-c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \end{pmatrix}.$$

把 A,B 和 V 代入下述式子:

$$((V^*AV)^rV^*B^pV(V^*AV)^r)^{\frac{1}{q}}\le (V^*AV)^{\frac{p+2r}{q}}.$$

化简后, 令 $c\to 0^+$, 可得出矛盾.

定理 3.1.1 可叙述为

定理 3.1.1′ 设 $p\ge 1$, $r>0$. 如果 $\alpha>1$, 则存在正可逆算子 A,B 使得 $A\ge B>0$, 但

$$A^{(1+r)\alpha}\not\ge\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}}.$$

定理 3.1.1″ 设 $p>0$, $q>0$, $r>0$, 且 $0<\delta\le 1$. 如果 $0<q<1$ 或 $(\delta+r)q<p+r$, 则存在正可逆算子 A,B 使得 $A^\delta\ge B^\delta>0$, 但

$$A^{\frac{p+r}{q}}\not\ge\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3.1.1″ 又蕴含下列结果:

定理 3.1.2 设 $p>0$, $q>0$, $r>0$. 如果 $rq<p+r$, 则存在正可逆算子 A,B 使得 $\log A\ge\log B$, 但

$$A^{\frac{p+r}{q}}\not\ge\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3.1.2 又可叙述为

定理 3.1.2′ 设 $p>0$, $q>0$, $r>0$. 如果 $\alpha>1$, 则存在正可逆算子 A,B 使得 $\log A\ge\log B$, 但

$$A^{r\alpha}\not\ge\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r\alpha}{p+r}}.$$

下面给出 **广义 Furuta 不等式的最优性**.

定理 3.1.3[50],[81],[96] 设 $p\ge1$, $t\in[0,1]$, $r\ge t$ 及 $s\ge1$. 如果 $\alpha>1$, 则存在正可逆算子 A,B 使得 $A\ge B>0$, 但

$$A^{(1+r-t)\alpha}\not\ge\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{(1-t+r)\alpha}{(p-t)s++r}}.$$

证 (1) 当 $t\in[0,1)$ 时, 假设对 $p\ge1$, $0\le t<1$, $t\le r$, $1\le s$ 且 $\alpha>1$ 有

$$S\ge T>0\Rightarrow S^{(1+r-t)\alpha}\not\ge\left[S^{\frac{r}{2}}\left(S^{\frac{-t}{2}}T^pS^{\frac{-t}{2}}\right)^sS^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{(1-t+r)\alpha}{(p-t)s++r}},\qquad(3.1.9)$$

从而只要 $A\ge B>0$, 由 Furuta 不等式有

$$S=A^{\frac{1}{1-t}}\ge\left(A^{\frac{t}{2(1-t)}}B^{\frac{p-t}{1-t}}A^{\frac{t}{2(1-t)}}\right)^{\frac{1}{p}}=T.$$

对上述 S,T 应用 (3.1.9) 可知

$$A^{\left(1+\frac{r}{1-t}\right)\alpha}\ge\left(A^{\frac{r}{2(1-t)}}B^{\frac{(p-t)s}{1-t}}A^{\frac{r}{2(1-t)}}\right)^{\frac{1+\frac{r}{1-t}}{\frac{p-t}{1-t}s+\frac{r}{1-t}}\alpha}.$$

在上式中, 令 $r_2=\dfrac{r}{1-t}\ge0$, $p_2=\dfrac{p-t}{1-t}s\ge1$, 则

$$A^{(1+r_2)\alpha}\ge\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\alpha\frac{1+r_2}{p_2+r_2}}$$

对 $p_2\ge1$, $r_2\ge0$ 及 $\alpha>1$ 成立, 此与定理 3.1.1′ 矛盾.

(2) 当 $t=1$, $p>1$ 时, 假设对 $1\le r$, $1\le s$ 且 $\alpha>1$ 有

$$S\ge T>0\Rightarrow S^{r\alpha}\ge\left[S^{\frac{r}{2}}\left(S^{\frac{-1}{2}}T^pS^{\frac{-1}{2}}\right)^sS^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{r\alpha}{(p-1)s++r}}.\qquad(3.1.10)$$

从而对正算子 A, B, 只要 $\log A \geq \log B$, 就有 (可参见定理 4.2.1)

$$S = A \geq \left(A^{\frac{1}{2}} B^{p-1} A^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = T.$$

应用 (3.1.10) 可知

$$A^{r\alpha} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{(p-1)s} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r\alpha}{(p-1)s+r}}.$$

在上式中，令 $p_3 = (p-1)s > 0$, 则对 $p_3 > 0$, $r \geq 1$, $\alpha > 1$ 有

$$A^{r\alpha} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^{p_3} A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r\alpha}{p_3+r}},$$

此与定理 3.1.2′ 矛盾.

(3) 当 $p = t = 1$ 时，由 L-H 不等式的最优性，存在 $E \geq F > 0$, 使得 $E^\alpha \not\geq F^\alpha$. 令

$$A = E^{\frac{1}{r}}, \quad B = E^{\frac{1}{2r}}\left(E^{-\frac{1}{2}} F E^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{s}} E^{\frac{1}{2r}},$$

则 $A \geq B > 0$, 但下式不成立：

$$A^{r\alpha} \geq \left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^s A^{\frac{r}{2}}\right]^\alpha.$$

3.2 Furuta 型算子单调函数的最佳单调区间

本节我们证明下列结果：

定理 3.2.1[112] 设 $-\dfrac{1}{2} < r < 0$, $A \geq B > 0$ 和 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p < -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $\alpha \in [-p-4r, +\infty)$ 及 $(-\infty, p]$ 上单调递减，并且这两个区间也不能扩大.

(2) 如果 $p > -2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $\alpha \in (-\infty, -p-4r]$ 及 $[p, +\infty)$ 上单调递增，并且这两个区间也不能扩大.

推论 3.2.1 设 $-\dfrac{1}{2} < r < 0$, $A \geq B > 0$ 和 $G(\alpha) = (B^r A^\alpha B^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p<-2r$, 那么 $G(\alpha)$ 在 $[-p-4r,+\infty)$ 及 $(-\infty,p]$ 上单调递增.

(2) 如果 $p>-2r$, 那么 $G(\alpha)$ 在 $(-\infty,-p-4r]$ 及 $[p,+\infty)$ 上单调递减.

推论 3.2.2 若 $r>0$, $p>0$, $A\geq B>0$ 和 $F(\alpha)=(A^rB^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $[p,+\infty)$ 上单调递增, 并且这个区间也不能扩大.

在证明定理之前, 先给出如下引理:

引理 3.2.1 设 $-\dfrac{1}{2}<r<0$, $A\geq B>0$ 和 $F(\alpha)=(A^rB^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$.

(1) 如果 $p<-2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $[-p-4r,+\infty)$ 及 $(-\infty,p]$ 上单调递减.

(2) 如果 $p>-2r$, 那么 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,-p-4r]$ 及 $[p,+\infty)$ 上单调递增.

证 (1) 对于任意 $\alpha\in[-p-4r,\infty)$ (或 $(-\infty,p)$), 我们只需证明: 对于充分小的 $\varepsilon>0$, $F(\alpha)\geq F(\alpha+\varepsilon)$. 事实上, 当 $0<\varepsilon<\alpha+2r$ (或 $0<\varepsilon<p-\alpha<-\alpha-2r$) 时, 可得

$$0<\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}<1,\ -1<\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}<0,\ 且-1<2r<0$$

$$\left(或-1<\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}<0,\ 0<\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}<1,\ 且-1<2r<0\right).$$

因此由降幂引理和 Löwner-Heinz 不等式, 我们可得

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= (A^rB^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}\\
&= \left[(A^rB^\alpha A^r)^{\frac{\alpha+2r+\varepsilon}{\alpha+2r}}\right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}}\\
&= \left[A^rB^{\frac{\alpha}{2}}\left(B^{\frac{\alpha}{2}}A^{2r}B^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}}B^{\frac{\alpha}{2}}A^r\right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}}\\
&\geq \left[A^rB^{\frac{\alpha}{2}}\left(B^{\frac{\alpha}{2}}B^{2r}B^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}}B^{\frac{\alpha}{2}}A^r\right]^{\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}}\\
&= F(\alpha+\varepsilon).
\end{aligned}$$

(2) 对于任意 $\alpha\in(-\infty,-p-4r)$ (或 $[p,+\infty)$), 我们仅需证明: 对

于充分小的 $\varepsilon>0$, $F(\alpha)\le F(\alpha+\varepsilon)$. 事实上, 若 $0<\varepsilon<-\alpha-p-4r<-\alpha-2r$ (或 $0<\varepsilon<\alpha+2r$), 则

$$-1<\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}<0,\ -1<\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}<0,\ \text{且}\ -1<2r<0$$

$$\left(\text{或}\ 0<\frac{\varepsilon}{\alpha+2r}<1,\ 0<\frac{p+2r}{\alpha+2r+\varepsilon}<1,\ \text{且}\ -1<2r<0\right).$$

因此, 仿照 (1) 的证明, 我们得到 $F(\alpha)\le F(\alpha+\varepsilon)$.

引理 3.2.2 令

$$A=\begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

其中 $a>1>b>0$, $\varepsilon,\delta>0$, 且使 $\varepsilon(1-b)=\delta(a-1)$. 如果 $-\frac{1}{2}<r<0$, $\alpha_1>\alpha_2$, $a^{2r}<b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r}<b^{\alpha_2+2r}$ 和 $F(\alpha)=(A^rB^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$, 那么

$$F(\alpha_1)\ge F(\alpha_2)\ \text{或}\ F(\alpha_1)\le F(\alpha_2) \tag{3.2.1}$$

蕴含

$$\begin{aligned}
&b^p\left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\Bigg[(a^{2r}-b^{2r})\\
&\cdot\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)\\
&+\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\Bigg]\\
&\qquad\ge a^{2r}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2\\
&\qquad\quad\cdot\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

证 令

$$U=\begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

其中 $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$. 则 U 是一个酉算子，而且

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & 0 \\ 0 & b+\delta \end{pmatrix}.$$

所以由 (3.2.1) 我们可知

$$\left[(U^*AU)^r(U^*BU)^{\alpha_1}(U^*AU)^r\right]^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}$$
$$\leq (\text{或} \geq) \left[(U^*AU)^r(U^*BU)^{\alpha_2}(U^*AU)^r\right]^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

即

$$\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \leq (\text{或} \geq) \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}, \tag{3.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_1 &= (a+\varepsilon)^{2r}(a-b-\delta+\varepsilon b^{\alpha_1}), \\
A_2 &= (b+\delta)^{2r}\left[\varepsilon+(a-b-\delta)b^{\alpha_1}\right], \\
A_3 &= (a+\varepsilon)^r(b+\delta)^r(1-b^{\alpha_1})\sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}, \\
\tilde{A}_1 &= (a+\varepsilon)^{2r}(a-b-\delta+\varepsilon b^{\alpha_2}), \\
\tilde{A}_2 &= (b+\delta)^{2r}\left[\varepsilon+(a-b-\delta)b^{\alpha_2}\right], \\
\tilde{A}_3 &= (a+\varepsilon)^r(b+\delta)^r(1-b^{\alpha_2})\sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)}.
\end{aligned}$$

当 ε, δ 非常小时，有 $A_1 < A_2$. 令

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_2 - A_1 + 2\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_1} & \sqrt{A_2 - A_1 + \varepsilon_1} \\ \sqrt{A_2 - A_1 + \varepsilon_1} & -\sqrt{\varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + 2\tilde{\varepsilon}_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} & \sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1} \\ \sqrt{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 + \tilde{\varepsilon}_1} & -\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} \end{pmatrix},$$

其中

$$2\varepsilon_1 = A_1 - A_2 + \sqrt{(A_2 - A_1)^2 + 4A_3^2},$$

$$2\tilde{\varepsilon_1} = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \sqrt{(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1)^2 + 4\tilde{A}_3{}^2}.$$

由 $V^* = V = V^{-1}$, $\tilde{V}^* = \tilde{V} = \tilde{V}^{-1}$ 和 (3.2.3), 我们可得

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} &= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \begin{pmatrix} (A_2+\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} & 0 \\ 0 & (A_1-\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \end{pmatrix} \\
&\leq (\text{或} \geq)\ \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V^* \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V \\
&= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} V\tilde{V} \begin{pmatrix} (\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} & 0 \\ 0 & (\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \end{pmatrix} \tilde{V}V \\
&= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
N_1 &= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (A_2+\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}, \\
N_2 &= \gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} (A_1-\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}, \\
M_1 &= \frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2-A_1+2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+2\tilde{\varepsilon_1})} \Big\{ \Big[\sqrt{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon_1}} \\
&\quad + \sqrt{(A_2-A_1+\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\ \Big]^2 (\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \\
&\quad + (\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} \Big[\sqrt{\tilde{\varepsilon_1}(A_2-A_1+\varepsilon_1)} \\
&\quad - \sqrt{\varepsilon_1(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\ \Big]^2 \Big\}, \\
M_2 &= \frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2-A_1+2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+2\tilde{\varepsilon_1})} \\
&\quad \cdot \Big[\sqrt{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon_1}} + \sqrt{(A_2-A_1+\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\ \Big]
\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\sqrt{\tilde{\varepsilon_1}(A_2-A_1+\varepsilon_1)}-\sqrt{\varepsilon_1(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\ \right]$$

$$\cdot\left[(\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}-(\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\ \right],$$

$$M_3=\frac{\gamma^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}}{(A_2-A_1+2\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+2\tilde{\varepsilon_1})}\left\{\left[\sqrt{\varepsilon_1\tilde{\varepsilon_1}}\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{(A_2-A_1+\varepsilon_1)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\right]^2(\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}$$

$$+(\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left[\sqrt{\tilde{\varepsilon_1}(A_2-A_1+\varepsilon_1)}\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{\varepsilon_1(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1})}\ \right]^2\right\}.$$

利用 $A_2-A_1+\varepsilon_1>0,\ \tilde{A}_2-\tilde{A}_1+\tilde{\varepsilon_1}>0$, 我们可得

$$\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\le(\ge)\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ Q_2 & Q_3\end{pmatrix}$$

和

$$(Q_1-P_1)(Q_3-P_2)\ge Q_2^2, \tag{3.2.4}$$

其中

$$P_1=(a-b+\varepsilon-\delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}(1+\delta_1)(1+\tilde{\delta_1})(A_2+\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}},$$

$$P_2=(a-b+\varepsilon-\delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}(1+\delta_1)(1+\tilde{\delta_1})(A_1-\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}},$$

$$Q_1=(a-b+\varepsilon-\delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left[\left(1+\sqrt{\delta_1\tilde{\delta_1}}\ \right)^2(\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\right.$$

$$\left.+(\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left(\sqrt{\delta_1}-\sqrt{\tilde{\delta_1}}\ \right)^2\right],$$

$$Q_2=(a-b+\varepsilon-\delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left(1+\sqrt{\delta_1\tilde{\delta_1}}\ \right)\left(\sqrt{\tilde{\delta_1}}-\sqrt{\delta_1}\ \right)$$

$$\left[(\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}-(\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\right],$$

$$Q_3=(a-b+\varepsilon-\delta)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left[\left(1+\sqrt{\delta_1\tilde{\delta_1}}\ \right)^2(\tilde{A}_1-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\right.$$

$$\left.+(\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left(\sqrt{\delta_1}-\sqrt{\tilde{\delta_1}}\ \right)^2\right],$$

$$\delta_1=\frac{\varepsilon_1}{A_2-A_1+\varepsilon_1},\quad \tilde{\delta_1}=\frac{\tilde{\varepsilon_1}}{\tilde{A_2}-\tilde{A_1}+\tilde{\varepsilon_1}}.$$

下面我们估计 $\{P_i,Q_j:\ i=1,2,\ j=1,2,3\}$ 中每一项关于 ε,δ 的阶数. 由于

$$\begin{aligned}
A_1&=a^{2r}(a-b)\left[1+\left(\frac{2r}{a}+\frac{b^{\alpha_1}}{a-b}\right)\varepsilon-\frac{\delta}{a-b}+o(\varepsilon)\right],\\
A_2&=b^{\alpha_1+2r}(a-b)\left[1+\left(\frac{2r}{b}-\frac{1}{a-b}\right)\delta\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\varepsilon}{b^{\alpha_1}(a-b)}+o(\varepsilon)\right],\\
A_3^2&=a^{2r}b^{2r}(a-b)(1-b^{\alpha_1})^2\varepsilon\left[1+\frac{2r}{a}\varepsilon\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{2r}{b}-\frac{1}{a-b}\right)\delta+o(\varepsilon)\right],\\
\varepsilon_1&=-\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\varepsilon\left(1+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right),\\
\delta_1&=\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})^2}\varepsilon+o(\varepsilon),\\
\tilde{\varepsilon_1}&=-\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\varepsilon\left(1+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right),\\
\tilde{\delta_1}&=\frac{(ab)^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})^2}\varepsilon+o(\varepsilon),\\
(A_1-\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}&=a^{2r\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\left[\left(\frac{2r}{a}+\frac{b^{\alpha_1}}{a-b}\right)\varepsilon\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\frac{\delta}{a-b}+\frac{b^{2r}(1-b^{\alpha_1})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})}\varepsilon\right]+o(\varepsilon)\right\},\\
(A_2+\varepsilon_1)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}&=b^{p+2r}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\left[\left(\frac{2r}{b}+\frac{-1}{a-b}\right)\delta\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{2a^{2r}-a^{2r}b^{\alpha_1}-b^{2r}}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})}\varepsilon\right]+o(\varepsilon)\right\},\\
(\tilde{A_1}-\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}&=a^{2r\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\left[\left(\frac{2r}{a}+\frac{b^{\alpha_2}}{a-b}\right)\varepsilon\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\frac{\delta}{a-b}+\frac{b^{2r}(1-b^{\alpha_2})^2}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})}\varepsilon\right]+o(\varepsilon)\right\},
\end{aligned}$$

$$(\tilde{A_2}+\tilde{\varepsilon_1})^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} = b^{p+2r}(a-b)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\left[\left(\frac{2r}{b}+\frac{-1}{a-b}\right)\delta\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2a^{2r}-a^{2r}b^{\alpha_2}-b^{2r}}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})}\varepsilon\right]+o(\varepsilon)\right\},$$
$$(\gamma)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} = (a-b)^{-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}\left(1-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{\varepsilon-\delta}{a-b}+o(\varepsilon)\right),$$
$$(\gamma)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}} = (a-b)^{-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}}\left(1-\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{\varepsilon-\delta}{a-b}+o(\varepsilon)\right),$$

所以

$$\left\{\begin{aligned}
P_1 &= b^{p+2r}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\left[\frac{2r}{b}\delta+\frac{(a^{2r}-b^{2r})(1-b^{\alpha_1})}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_1+2r})}\varepsilon\right]\right.\\
&\quad+\frac{(ab)^{2r}}{a-b}\left(\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2\varepsilon\\
&\quad\left.+\frac{(ab)^{2r}}{a-b}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\right)^2\varepsilon+o(\varepsilon)\right\},\\
P_2 &= a^{2r\left(\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)}+o(1),\\
Q_1 &= a^{2r\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\right)}\frac{(ab)^{2r}}{a-b}\left(\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\right)^2\varepsilon\\
&\quad+b^{p+2r}\left\{1+\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\left[\frac{2r}{b}\delta+\frac{(a^{2r}-b^{2r})(1-b^{\alpha_2})}{(a-b)(a^{2r}-b^{\alpha_2+2r})}\varepsilon\right]\right.\\
&\quad\left.+2\frac{(ab)^{2r}}{a-b}\left(\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\right)\varepsilon+o(\varepsilon)\right\},\\
Q_3 &= a^{2r\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\right)}+o(1),\\
Q_2^2 &= \frac{(ab)^{2r}}{a-b}\left(b^{p+2r}-a^{2r\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\right)}\right)^2\\
&\quad\cdot\left(\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\right)^2\varepsilon+o(\varepsilon).
\end{aligned}\right. \tag{3.2.5}$$

将 (3.2.5) 代入 (3.2.4), 令 $\varepsilon\to 0$, 可得

$$b^p\left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\left[(a^{2r}-b^{2r})\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)+\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\geq a^{2r}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2\\
&\cdot\left[\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\right)^2-b^{p+2r}\left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\right)\right.\\
&\left.-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

因此, (3.2.2) 得证.

注 在引理 3.2.2 中, 用 $a^{2r}\neq b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r}\neq b^{\alpha_2+2r}$ 分别代替 $a^{2r}<b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r}<b^{\alpha_2+2r}$, (3.2.2) 也是正确的. 事实上, 当 $a^{2r}>b^{\alpha_1+2r}$ 或 $a^{2r}>b^{\alpha_2+2r}$ 时, 我们仅需令

$$
V=\frac{1}{\sqrt{A_1-A_2+2\varepsilon_1}}\begin{pmatrix}\sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1}\\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1}\end{pmatrix}
$$

或

$$
\tilde{V}=\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_1-\tilde{A}_2+2\tilde{\varepsilon_1}}}\begin{pmatrix}\sqrt{\tilde{A}_1-\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1}} & \sqrt{\tilde{\varepsilon_1}}\\ \sqrt{\tilde{\varepsilon_1}} & -\sqrt{\tilde{A}_1-\tilde{A}_2+\tilde{\varepsilon_1}}\end{pmatrix},
$$

仿照引理 3.2.2 的证明即可.

定理 3.2.1 的证明 引理 3.2.1 已经证明了定理的前一部分, 所以我们只需证明后一部分即可.

(1) 当 $p<-2r$ 时, 我们可分两种情况来证明.

(a) 如果存在 α_1,α_2 满足 $-2r<\alpha_1<\alpha_2<-p-4r$, 并且对任意的 $A\geq B>0$,

$$
(A^rB^{\alpha_1}A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}\geq(A^rB^{\alpha_2}A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},
$$

由引理 3.2.2, 可得

$$
\begin{aligned}
&b^p\left(a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\\
&\left[(a^{2r}-b^{2r})\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\right]
\end{aligned}
$$

$$\geq a^{2r}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2$$
$$\cdot\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\right),$$

其中 $a>1>b>0$, $\varepsilon,\delta>0$, $\varepsilon(1-b)=\delta(a-1)$, $a^{2r}<b^{\alpha_1+2r}$, $a^{2r}<b^{\alpha_2+2r}$. 由该式知

$$b^p\left(a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}}-1\right)\Big[(a^{2r}-b^{2r})$$
$$\cdot\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)$$
$$+\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\Big]$$
$$\geq a^{2r+\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2$$
$$\cdot\left(b^{p+2r}a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}-1\right)\left(b^{p+2r}a^{-\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-1\right). \tag{3.2.6}$$

在 (3.2.6) 中令 $a\to+\infty$, 由 $2r+\dfrac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}>0$, 我们得到一个矛盾的结果.

(b) 如果存在 α_1,α_2 满足 $p<\alpha_1<\alpha_2<-2r$, 并且对所有的 $A\geq B>0$,

$$(A^rB^{\alpha_1}A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}}\geq(A^rB^{\alpha_2}A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

利用 (3.2.2), 可得

$$b^p\left(a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}}-1\right)\Big[(a^{2r}-b^{2r})$$
$$\cdot\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)$$
$$+\left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}-\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\Big]$$
$$\geq a^{2r-\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right)^2$$
$$\cdot\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}\right)\left(b^{p+2r}-a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}\right). \tag{3.2.7}$$

在 (3.2.7) 中令 $a \to +\infty$, 而 $2r - \frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r} > 0$, 我们又得到一个矛盾的结果.

(2) 当 $p > -2r$ 时，我们也可分两种情况来证明.

(a) 如果存在 α_1, α_2 满足 $-p-4r < \alpha_2 < \alpha_1 < -2r$, 并对任意的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

通过引理 3.2.2, 也可得到 (3.2.6). 在 (3.2.6) 中令 $a \to +\infty$, 则

$$2r + \frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r} > 0,$$

我们得到一个矛盾的结果.

(b) 如果存在 α_1, α_2 满足 $-2r < \alpha_2 < \alpha_1 < p$, 并对所有的 $A \geq B > 0$,

$$(A^r B^{\alpha_1} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_1+2r}} \geq (A^r B^{\alpha_2} A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}},$$

由引理 3.2.2, 也可得到 (3.2.7). 在 (3.2.7) 中令 $a \to +\infty$, 则由

$$2r - \frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r} > 0,$$

我们也得到一个矛盾的结果. 至此，定理得到证明.

我们知道，若 $A \geq B > 0$, 则 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$, 那么由定理 3.2.1 显见推论 3.2.1 成立.

推论 3.2.2 的证明 由定理 F 易见推论的前一部分；我们只需证明 $[p, +\infty)$ 是最好的.

若 $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < p$, 由引理 3.2.2 和其注，我们可知 (3.2.2) 也是正确的，因此可得

$$\begin{aligned} & b^p\left(1 - a^{\frac{2r(2r+p)(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_2+2r)(\alpha_1+2r)}}\right)\Bigg[(a^{2r}-b^{2r}) \\ & \cdot \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r}\frac{1-b^{\alpha_2}}{a^{2r}-b^{\alpha_2+2r}} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\frac{1-b^{\alpha_1}}{a^{2r}-b^{\alpha_1+2r}}\right) \\ & + \left(\frac{p+2r}{\alpha_2+2r} - \frac{p+2r}{\alpha_1+2r}\right)\frac{2r}{b}\frac{1-b}{a-1}(a-b)\Bigg] \end{aligned}$$

$$\geq a^{\frac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}} a^{-2r}\left(\frac{1-b^{\alpha_2}}{1-a^{-2r}b^{\alpha_2+2r}}-\frac{1-b^{\alpha_1}}{1-a^{-2r}b^{\alpha_1+2r}}\right)^2$$

$$\cdot\left(b^{p+2r}a^{\frac{-2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}}-1\right)\left(b^{p+2r}a^{-\frac{2r(2r+p)}{\alpha_2+2r}}-1\right). \tag{3.2.8}$$

在 (3.2.8) 中令 $a\to+\infty$, 由 $-2r+\dfrac{2r(2r+p)}{\alpha_1+2r}>0$, 我们得到一个矛盾的结果.

3.3 具有负指数 Furuta 型不等式外部指数的最优性

本节最后，我们指出利用引理 3.2.2, 可得具有负指数 Furuta 型不等式 (I),(II) 及 (IV) 的外部指数的最优性. (III) 的外部指数是否最优，目前尚未解决.

(I) 当 $1\geq p>t>0$ 且 $p\geq\dfrac{1}{2}$ 时，如果存在 $\sigma>1$ 使得

$$A^{\sigma-t}\geq(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\sigma-t}{p-t}},$$

在 (3.2.2) 式中，令 $t=-2r$, $\alpha_2=0$, $p=\sigma$, $\alpha_1=p$, 可得

$$b^{\sigma}\left(a^{\frac{-t(\sigma-t)}{p-t}}-a^{\sigma-t}\right)\left[(a^{-t}-b^{-t})\frac{(\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t}-b^{p-t})}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sigma-t}{p-t}+\frac{\sigma-t}{t}\right)\frac{t(1-b)(a-b)}{b(a-1)}\right]$$

$$\geq a^{-t}\left(\frac{1-b^p}{a^{-t}-b^{p-t}}\right)^2(b^{\sigma-t}-a^{\sigma-t})$$

$$\cdot\left(b^{\sigma-t}-a^{-t\frac{\sigma-t}{p-t}}\right). \tag{3.3.1}$$

在 (3.3.1) 中，令 $b\to0^+$, 可得

$$0\geq a^ta^{\sigma-t}a^{-\frac{t(\sigma-t)}{p-t}}.$$

故矛盾.

(II) 当 $1 \geq t > p \geq 0$ 且 $p \leq \frac{1}{2}$ 时，如果存在 $\sigma < 0$ 使得

$$A^{\sigma-t} \geq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\sigma-t}{p-t}},$$

(3.3.1) 式仍成立，从而有

$$\begin{aligned} & b^{\sigma} a^{\sigma-t}\left(a^{\frac{-p(\sigma-t)}{p-t}}-1\right)\left[(a^{-t}-b^{-t})\frac{(\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t}-b^{p-t})}\right. \\ & \left.-\frac{\sigma-t}{p-t}\frac{p(1-b)(a-b)}{b(a-1)}\right] \\ & \qquad \geq a^{-t}\left(\frac{1-b^p}{a^{-t}-b^{p-t}}\right)^2 (b^{\sigma-t}-a^{\sigma-t}) \\ & \qquad \cdot\left(b^{\sigma-t}-a^{-t\frac{\sigma-t}{p-t}}\right). \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

在 (3.3.2) 中，令 $a \to \infty$, 可得

$$0 \geq \left(\frac{1-b^p}{b^{p-t}}\right)^2 b^{2(\sigma-t)},$$

故亦矛盾.

(IV) 当 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$ 时，如果存在 $\sigma < 0$ 使得

$$A^{2p-1+\sigma-t} \geq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}},$$

由 (3.2.2) 则有

$$\begin{aligned} & b^{2p-1+\sigma}\left(a^{\frac{-t(2p-1+\sigma-t)}{p-t}}-a^{2p-1+\sigma-t}\right) \\ & \cdot\left[(a^{-t}-b^{-t})\frac{(2p-1+\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t}-b^{p-t})}\right. \\ & \left.-\frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}\frac{p(1-b)(a-b)}{b(a-1)}\right] \\ & \qquad \geq a^{-t}\left(\frac{1-b^p}{a^{-t}-b^{p-t}}\right)^2 (b^{2p-1+\sigma-t}-a^{2p-1+\sigma-t}) \\ & \qquad \cdot\left(b^{2p-1+\sigma-t}-a^{-t\frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}}\right), \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

即

$$
\begin{aligned}
& b^{-\sigma}\Big(a^{\frac{-t(2p-1+\sigma-t)}{p-t}} - a^{2p-1+\sigma-t}\Big) \\
& \cdot\Big[b(a^{-t}-b^{-t})\frac{(2p-1+\sigma-t)(1-b^p)}{(p-t)(a^{-t}-b^{p-t})} \\
& - \frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}\frac{p(1-b)(a-b)}{(a-1)}\Big] \\
& \qquad \geq a^{-t}\left(\frac{1-b^p}{a^{-t}b^{t-p}-1}\right)^2(1-b^{-2p+1-\sigma+t}a^{2p-1+\sigma-t}) \\
& \qquad\quad \cdot\Big(1-b^{-2p+1-\sigma+t}a^{-t\frac{2p-1+\sigma-t}{p-t}}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

在 (3.3.4) 中, 令 $b \to 0^+$, 可得 $0 \geq a^{-t}$. 故也矛盾.

第四章 Furuta不等式与Furuta型不等式的应用

4.1 Ando定理

Ando在1987年得到了两个正算子 A, B 的序 $A \geq B$ 的等价条件，由此可得混序 $\log A \geq \log B$ 的等价定义.

定义 1 设 $f(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数. 如果对任意的 $A \geq B \geq 0$ 都有 $f(A) \geq f(B)$, 则称 f 是 $[0, \infty)$ 上的 **算子单调函数**.

在证明 Ando 定理之前，先看下列引理：

引理 4.1.1 (F. Hansen)[61] *设 X 及 A 是 H 上的有界线性算子，且 $X \geq 0$, $\|A\| \leq 1$, f 是 $[0, \infty)$ 上的算子单调函数，则*

$$A^* f(X) A \leq f(A^* X A).$$

证 令 $H \oplus H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in H \right\}$, 并在它上面定义内积

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2),$$

则 $H \oplus H$ 为 Hilbert 空间. 考虑 $H \oplus H$ 上的线性算子

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},$$

其中 $C = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $B = (I - AA^*)^{\frac{1}{2}}$. 简单计算表明 U 是酉算子. 若记

$$X_0 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

及对任意的 $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, 令

$$Y = \begin{pmatrix} A^*XA + \varepsilon I & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix},$$

则当 λ 充分大使得 $\lambda I \geq BXB$ 时，有

$$Y - U^*X_0U = \begin{pmatrix} \varepsilon I & -A^*XB \\ -BXA & 2\lambda - BXB \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \varepsilon I & d \\ d^* & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 $d = -A^*XB$. 而当 $\lambda \geq \dfrac{\|d\|^2}{\varepsilon}$ 时，对任意的 $\xi, \eta \in H$ 有

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} \varepsilon I & d \\ d^* & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= (\varepsilon\xi + d\eta, \xi) + (d^*\xi + \lambda\eta, \eta) \\
&= \varepsilon\|\xi\|^2 + (d\eta, \xi) + (d^*\xi, \eta) + \lambda\|\eta\|^2 \\
&\geq \varepsilon\|\xi\|^2 - 2\|d\|\|\xi\|\|\eta\| + \lambda\|\eta\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

故当 λ 充分大时必有 $U^*X_0U \leq Y$. 再由 f 的连续性得

$$U^*f(X_0)U = f(U^*X_0U) \leq f(Y),$$

即

$$\begin{pmatrix} A^*f(X)A & A^*f(X)B \\ Bf(X)A & Bf(X)B \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} f(A^*XA + \varepsilon I) & 0 \\ 0 & f(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

特别地，有

$$A^*f(X)A \leq f(A^*XA + \varepsilon I),$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 得 $A^*f(X)A \leq f(A^*XA)$.

定理 4.1.1 (Ando)[8] 设 A, B 是空间 H 上的有界自伴算子，用 $\sharp$ 表示算子间的几何平均，则下列断言等价：

(1) $A \geq B$;

(2) 对一切 $t \geq 0$, 有 $e^{-tA} \sharp e^{tB} \leq I$;

(3) $t \mapsto e^{-tA} \sharp e^{tB}$ 是 $[0, \infty)$ 到 $L(H)$ 上的递降映射.

证 令

$$\Phi(t) = e^{-tA} \sharp e^{tB} = e^{-\frac{tA}{2}} \left(e^{\frac{tA}{2}} e^{tB} e^{\frac{tA}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{tA}{2}},$$

则 $\Phi(t)$ 是一个关于 t 在 $t = 0$ 的范数可微映射且 $\Phi(0) = I$. 又因 $\Phi(t)\, e^{tA}\, \Phi(t) = e^{tB}$, 故

$$2\Phi'(0) + A = \frac{d}{dt}\{\Phi(t)\, e^{tA}\, \Phi(t)\}_{t=0} = B,$$

从而有

$$\Phi'(0) = -\frac{A - B}{2}. \tag{4.1.1}$$

(1) ⇒ (2) 设 $A \geq B$, 对任意正数 ε 有 $A + \varepsilon I - B > 0$ 且

$$e^{-t(A+\varepsilon I)} \sharp e^{tB} = e^{-\frac{t\varepsilon}{2}} \Phi(t).$$

故为证 (2) 我们只要假定 $A > B$ 即可. 此时必存在 $\delta > 0$ 使得 $A - B \geq \delta I$, 由 (4.1.1) 得到 $\Phi'(0) \leq -\frac{\delta}{2} I$. 从而存在充分小的正数 ε_0 使得

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = I, \quad \forall t \in [0, \varepsilon_0]. \tag{4.1.2}$$

要从 (4.1.2) 推出 (2), 只要证明对任意的 $X, Y > 0$ 有下面的蕴含关系:

$$X \sharp Y \leq I \Rightarrow X^2 \sharp Y^2 \leq X \sharp Y.$$

事实上, 令 $Z_1 = X \sharp Y$, $Z_2 = X^2 \sharp Y^2$, 则

$$Z_1 X^{-1} Z_1 = Y, \quad Z_2 X^{-2} Z_2 = Y^2.$$

由 $0 \leq Z_1 \leq I$ 可知 $0 \leq Z_1^2 \leq I$, 故

$$Z_2 X^{-2} Z_2 = Z_1 X^{-1} Z_1^2 X^{-1} Z_1 \leq Z_1 X^{-2} Z_1.$$

从而 $(X^{-1} Z_2 X^{-1})^2 \leq (X^{-1} Z_1 X^{-1})^2$. 再由 L-H 不等式可得

$$X^{-1} Z_2 X^{-1} \leq X^{-1} Z_1 X^{-1},$$

故 $Z_2 \le Z_1$.

(2) ⇒ (3) 设对一切 $t \ge 0$ 有 $\Phi(t) \le I$. 取 s 使 $0 < s < t$ 及 $p = \frac{s}{t}$, 则 $0 < p < 1$. 由 $\mathrm{e}^{sB} = \left(\Phi(t)\,\mathrm{e}^{tA}\,\Phi(t)\right)^p$, 注意到 $f(\lambda) = \lambda^p$ 是 $[0,\infty)$ 上的算子单调函数及 $0 \le \Phi(t) \le I$, 由引理 4.1.1 可得

$$\left(\Phi(t)\,\mathrm{e}^{tA}\,\Phi(t)\right)^p \ge \Phi(t)\left(\mathrm{e}^{tA}\right)^p\Phi(t) = \Phi(t)\,\mathrm{e}^{sA}\,\Phi(t).$$

从而 $\mathrm{e}^{sB} \ge \Phi(t)\,\mathrm{e}^{sA}\,\Phi(t)$, 进而 $\Phi(s)\,\mathrm{e}^{sA}\,\Phi(s) = \mathrm{e}^{sB} \ge \Phi(t)\,\mathrm{e}^{sA}\,\Phi(t)$. 故

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{sA}{2}}\,\Phi(s)\,\mathrm{e}^{\frac{sA}{2}}\right)^2 \ge \left(\mathrm{e}^{\frac{sA}{2}}\,\Phi(t)\,\mathrm{e}^{\frac{sA}{2}}\right)^2.$$

易见 $\Phi(s) \ge \Phi(t)$.

(3) ⇒ (1) 因为 $\Phi(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的递降函数, 故 $\Phi'(0) \le 0$. 由 (4.1.1) 知 $A \ge B$.

从定理 4.1.1 的证明可以知道:

推论 4.1.1 定理 4.1.1 中的条件 (2),(3) 可分别换为下面的 (2a),(3a) 或 (2b), (3b):

(2a) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对一切 $t \in [0,\varepsilon]$ 有 $\mathrm{e}^{-tA}\,\sharp\,\mathrm{e}^{tB} \le I$;

(3a) 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}\,\sharp\,\mathrm{e}^{tB}$ 是 $[0,\varepsilon]$ 到 $L(H)$ 上的递降映射;

(2b) 对一切 $t \ge 0$ 有 $\mathrm{e}^{tA}\,\sharp\,\mathrm{e}^{-tB} \ge I$;

(3b) $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}\,\sharp\,\mathrm{e}^{-tB}$ 是 $[0,\infty)$ 到 L(H) 上的递增映射.

推论 4.1.2 设 $A \gg B > 0$, 即 $\log A \ge \log B$. 则

(1) $t \mapsto A^{-t}\,\sharp\,B^t$(或 $A^t\,\sharp\,B^{-t}$) 是 $[0,\infty)$ 上的递降 (或递增) 函数;

(2) $(A^{\frac{t}{2}}B^tA^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{2}} \le A^t$.

利用可逆算子间的算术 - 几何 - 调和不等式:

$$\frac{X+Y}{2} \ge X\,\sharp\,Y \ge \left(\frac{X^{-1}+Y^{-1}}{2}\right)^{-1},$$

易得下列推论:

推论 4.1.3　设 $A > B > 0$, 则对一切 $t \geq 0$ 有 $\dfrac{e^{tA} + e^{-tB}}{2} \geq I$.

定理 4.1.2　设 $f(\lambda)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的可微递增凸函数，则对 H 上的两个自伴算子 A, B, 只要 $A \geq B$, 就有函数 $t \mapsto f(tA) + f(-tB)$ 是 $[0, \infty)$ 到 $L(H)$ 上的递增映射.

证　令 $\psi(t) = f(tA) + f(-tB)$, 则 $\psi(t)$ 也是凸的. 故对一切 $t \geq 0$ 有

$$\psi'(t) \geq \psi'(0) = (A - B)f'(0).$$

再由 $f(\lambda)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的递增函数知 $\psi'(t) \geq 0$, 故结论成立.

4.2　Furuta 不等式应用于 Ando 定理和算子的广义相对熵

由推论 4.1.2, 我们有下列定理 4.2.A.

定理 4.2.A　对可逆正算子 A, B, 下列结果等价：

(1) $A \gg B$;

(2) 对一切 $p \geq 0$ 有 $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}$;

(3) $G(p) = A^{-p} \sharp B^p$ 是 $[0, \infty)$ 上的递降函数.

除了几何平均以外，算子间一般的平均的定义由 Kubo 和 Ando [71] 引入.

定义 2　一个正算子间的二元运算 m 称为一个 **平均**, 若它满足：

(1) m 是上半连续的，即当 $A_n \downarrow A$ 及 $B_n \downarrow B$ 时，有 $A_n m B_n \to AmB$;

(2) $A \leq C$ 且 $B \leq D$ 蕴含 $AmB \leq CmD$;

(3) 对一切有界线性算子 T, $T^*(AmB)T \leq (T^*AT)m(T^*BT)$.

注　当 T 可逆时，(3) 中的不等式可用等式代替. 在 [71] 中，每个算子单调函数对应一个平均，故相应于算子单调函数 x^s $(0 \leq s \leq 1)$ 存在唯一的平均 m_s, 使对一切正算子 A 有 $Im_sA = A^s$. 当 $s = \dfrac{1}{2}$ 时，$m_{\frac{1}{2}}$ 是几何平均 $\sharp$.

如果对 $p\ge 1$, $s\ge 0$ 令 $m_{(p,s)}=m_{\frac{1+s}{p+s}}$, 那么利用平均的记号 Furuta 型算子单调函数可写成:

定理 4.2.B 若 $A\ge B\ge 0$, 则

$$M(p,r)=B^{-2r}m_{(p,2r)}A^p=B^{-r}(B^rA^pB^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}B^{-r}$$

是单调增函数, 即

$$M(p+t,r+s)\ge M(p,r),$$

其中 $p\ge 1$ 及 $r,s,t\ge 0$. 特别地,

$$M(p,r)=B^{-2r}m_{(p,2r)}A^p\ge M(1,0)=A\ge B,$$

$$N(p,r)=A^{-2r}m_{(p,2r)}B^p\le M(0,1)=B\le A.$$

下面我们讨论混序情形的算子平均构成的算子单调函数, 为此先给出混序时的 Furuta 型不等式.

定理 4.2.1[43] 设 $A\gg B$, 则对 $p,r\ge 0$ 有

$$(B^rA^pB^r)^{\frac{2r}{p+2r}}\ge B^{2r},\quad A^{2r}\ge (A^rB^pA^r)^{\frac{2r}{p+2r}}.$$

证 首先由降幂引理知, 对一切 $p\ge 0$ 及 $r\ge 0$ 有

$$A^{2r}\ge (A^rB^pA^r)^{\frac{2r}{p+2r}}\Leftrightarrow \left(B^{\frac{p}{2}}A^{2r}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+2r}}\ge B^p. \tag{4.2.1}$$

事实上, $A^{2r}\ge (A^rB^pA^r)^{\frac{2r}{p+2r}}$ 等价于

$$A^{2r}\ge A^rB^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{2r}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{-p}{p+2r}}B^{\frac{p}{2}}A^r.$$

令 $C=A^p$, $D=\left(A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, 由定理 4.2.A 知 $A\gg B$, 则 $C\ge D\ge 0$, 再利用 Furuta 不等式, 对一切 $a\ge 1$ 和 $t\ge 0$ 知

$$C\ge C^{-t}(C^tD^aC^t)^{\frac{1+2t}{a+2t}}C^{-t},$$

即

$$A^{p(1+2t)} \geq \left[A^{pt}\left(A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{a}{2}}A^{pt}\right]^{\frac{1+2t}{a+2t}}.$$

令 $a=2$, 得

$$A^{p(1+2t)} \geq \left(A^{p\left(t+\frac{1}{2}\right)}B^pA^{p\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1+2t}{2+2t}}.$$

令 $r=p\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\dfrac{1+2t}{2(1+t)}=\dfrac{2r}{p+2r}$ 及 $r\geq\dfrac{p}{2}$, 故对一切 $2r\geq p\geq 0$,

$$A^{2r} \geq (A^rB^pA^r)^{\frac{2r}{p+2r}}.$$

另一方面，由 $A\gg B$ 知，对一切 $p\geq 0$ 有

$$A^p \geq \left(A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 (4.2.1), 它又等价于对一切 $p\geq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{p}{2}}A^pB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B^p,$$

现令 $E=\left(B^{\frac{p}{2}}A^pB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 及 $F=B^p$. 再利用 Furuta 不等式，对所有 $a\geq 1$, $t\geq 0$ 有

$$F^{-2t}m_{(a,2t)}E^a \geq F,$$

即

$$\left[B^{pt}\left(B^{\frac{p}{2}}A^pB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{a}{2}}B^{pt}\right]^{\frac{1+2t}{a+2t}} \geq B^{p(1+2t)}.$$

令 $a=2$, 对所有 $t\geq 0$, 得

$$\left(B^{p\left(t+\frac{1}{2}\right)}A^pB^{p\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1+2t}{2+2t}} \geq B^{p(1+2t)}.$$

令 $q=p\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\dfrac{1+2t}{2+2t}=\dfrac{2q}{p+2q}$, 及对所有 $2q\geq p\geq 0$ 有

$$(B^qA^pB^q)^{\frac{2q}{p+2q}} \geq B^{2q}.$$

再由 (4.2.1), 它等价于

$$A^p \geq \left(A^{\frac{p}{2}}B^{2q}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+2q}}, \quad \text{对所有 } 2q\geq p\geq 0.$$

现在记 p 为 $2r$, 记 $2q$ 为 p, 则

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}}, \quad \text{对所有 } p \geq 2r \geq 0.$$

故对一切 $p \geq 0$ 及一切 $r \geq 0$, 有

$$A^{2r} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{2r}{p+2r}},$$

从而亦有 (对 $B^{-1} \geq A^{-1} > 0$ 应用上式)

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{2r}{p+2r}} \geq B^{2r}.$$

推论 4.2.1 若 $A \gg B$, 则

(1) 对一个给定的 $r \geq 0$, 有

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{s}{p+2r}} \geq B^s, \quad \text{对 } p \geq 0 \text{ 及 } 2r \geq s \geq 0;$$

(2) 对一个给定的 $p \geq 0$, 有

$$A^s \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^{2r} A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}}, \quad \text{对所有 } r \geq 0 \text{ 及 } p \geq s \geq 0.$$

下面我们利用推论 4.2.1 给出 Ando 定理的一个推广.

对所有 $p \geq t \geq 0$ 及 $s \geq 0$, 记 $m_{(p,s,t)} = m_{\frac{(t+s)}{(p+s)}}$. 显然,

$$m_{(p,s,1)} = m_{(p,s)} = m_{\frac{1+s}{p+s}}.$$

定理 4.2.2 设 $A \gg B$, 则对一个给定的 $t \geq 0$, 有

$$M_t(p,r) = B^{-2r} m_{(p,2r,t)} A^p = B^{-r}(B^r A^p B^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}} B^{-r},$$

对 $p \geq t$ 及 $r \geq 0$ 是单调增加的.

证 首先对每个 $r > 0$ 及 $p \geq t$, 有

$$M_t(p+s,r) \geq M_t(p,r), \quad \text{对 } p \geq s \geq 0.$$

令 $m = m_{(p+s,2r,t)}$, 由推论 4.2.1 (2) 及 $X^\alpha m_s X^\beta = X^{\alpha+(\beta-\alpha)s}$ 知

$$
\begin{aligned}
M_t(p+s,r) &= B^{-2r}mA^{p+s}\\
&= A^{\frac{p}{2}}\left[\left(A^{-\frac{p}{2}}B^{-2r}A^{-\frac{p}{2}}\right)mA^s\right]A^{\frac{p}{2}}\\
&\geq A^{\frac{p}{2}}\left[\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{-1}m\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}}\right]A^{\frac{p}{2}}\\
&= A^{\frac{p}{2}}\left\{\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{s}{p+2r}}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{t+2r}{p+s+2r}}(A^{\frac{p}{2}}B^{2r}A^{\frac{p}{2}})^{-\frac{1}{2}}\right\}A^{\frac{p}{2}}\\
&= A^{\frac{p}{2}}\left(A^{-\frac{p}{2}}B^{-2r}A^{-\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-t}{p+2r}}A^{\frac{p}{2}}\\
&= A^p m_{\frac{p-t}{p+2r}}B^{-2r} = B^{-2r}m_{(p,2r,t)}A^p\\
&= M_t(p,r).
\end{aligned}
$$

下一步，我们证明 r 的单调性.

若 $0 \leq s \leq 2r$, 令 $m = m(p, 2r+s, t)$, 利用推论 4.2.1 (1) 可得

$$
\begin{aligned}
M_t\left(p, r+\frac{s}{2}\right) &= B^{-2r-s}mA^p\\
&= B^{-r}(B^{-s}m(B^rA^pB^r))B^{-r}\\
&\geq B^{-r}\left[(B^rA^pB^r)^{-\frac{s}{p+2r}}m(B^rA^pB^r)\right]B^{-r}\\
&= B^{-r}(B^rA^pB^r)^{\frac{t+2r}{p+2r}}B^{-r}\\
&= M_t(p,r).
\end{aligned}
$$

作为定理 4.2.2 的一个直接结果，由定理 4.2.A 可推广为

定理 4.2.3 对正可逆算子 A 和 B, 下列条件等价：

(1) $A \gg B$;

(2) 对每个固定的 $t \geq 0$, $M_t(p,r) \geq A^t$, 其中 $r \geq 0$, $p \geq t$;

(3) 对每个固定的 $t \geq 0$, $M_t(p,r)$ 是 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 上关于 r,p 的单调增函数.

证 (1) ⇒ (3) 由定理 4.2.2 可得.

(3) ⇒ (2) 显见，因 $M_t(p,0)=A^t$.

(2) ⇒ (1) 在 (2) 中令 $t=0$ 及 $2r=p$, 则 $\left(B^{\frac{p}{2}}A^pB^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\geq B^p$. 由定理 4.2.A 知 $A\gg B$.

注 在定理 4.2.3 中，令 $t=1$, 得 Furuta 不等式的推广：

推论 4.2.2 设 $A\gg B$, 则当 $p\geq 1$, $r\geq 0$ 时,

$$M(p,r)=B^{-2r}m_{(p,2r)}A^p\geq A,$$

即

$$(B^rA^pB^r)^{\frac{1+2r}{p+2r}}\geq B^rAB^r.$$

定理 4.2.3 又可写成下列形式，并可直接证明如下：

推论 4.2.3 对正可逆算子 A 和 B, 下列条件等价:

(1) $A\gg B$;

(2) 对每个固定的 $t\geq 0$, $F(p,r)=B^{-\frac{r}{2}}\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{t+r}{p+r}}B^{-\frac{r}{2}}$ 是 $r\geq 0$ 及 $p\geq t$ 上的关于 r,p 的单调增函数;

(3) 对每个固定的 $t\geq 0$, $G(p,r)=A^{-\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{t+r}{p+r}}A^{-\frac{r}{2}}$ 是 $r\geq 0$ 及 $p\geq t$ 上关于 r,p 的单调减函数.

证 (1) ⇒ (3) 由 $A\gg B$ 知，对 $p,r\geq 0$ 有

$$A^r\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}}.$$

再由降幂引理，对 $p,r\geq 0$ 有

$$B^p\leq\left(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+r}}.$$

故应用 L-H 不等式，对 $r\geq 0$, $0\leq w\leq p$, $0\leq u\leq r$ 有

$$B^w\leq\left(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{w}{p+r}}\tag{4.2.2}$$

和

$$A^u\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{u}{p+r}}.\tag{4.2.3}$$

故由 (4.2.2) 知

$$\begin{aligned} g(p,r) &= \left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{t+r}{p+r}} \\ &= \left[\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{p+w+r}{p+r}}\right]^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\ &= \left[A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{w}{p+r}}B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\ &\geq \left(A^{\frac{r}{2}}B^{p+w}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{t+r}{p+w+r}} \\ &= g(p+w,r). \end{aligned}$$

因此， $G(p,r)=A^{-\frac{r}{2}}g(p,r)A^{-\frac{r}{2}}$ 也是 p 的下降函数. 再由 (4.2.3) 得

$$\begin{aligned} G(p,r) &= A^{-\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{t+r}{p+r}}A^{-\frac{r}{2}} \\ &= B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{t-p}{p+r}}B^{\frac{p}{2}} \\ &= B^{\frac{p}{2}}\left[\left(B^{\frac{p}{2}}A^rB^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{r+u+p}{p+r}}\right]^{\frac{t-p}{p+u+r}}B^{\frac{p}{2}} \\ &= B^{\frac{p}{2}}\left[B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{u}{p+r}}A^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{t-p}{p+u+r}}B^{\frac{p}{2}} \\ &\geq B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{r+u}B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{t-p}{p+u+r}}B^{\frac{p}{2}} \\ &= G(p,r+u). \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) 令 $t=0$, 对任意 $p,r\geq 0$ 有

$$I\geq A^{-\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}}A^{-\frac{r}{2}},$$

即对 $p,r\geq 0$ 有

$$A^r\geq \left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}}.$$

由定理 4.2.1 可得 $A\gg B$.

对 $B^{-1}\gg A^{-1}$ 应用 (1) $\Leftrightarrow$ (3), 可知 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 亦成立.

例 1 当 $A \gg B$ 时， Furuta 不等式 $B^{-2r}m_{(p,2r)}A^p \geq B$ 不一定成立. 如对

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

有

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{\frac{1}{2}}.$$

故 $A \not\geq B$, 但 $A \gg B$. 但当 $p = 1 = 2r$ 时， $B^{-2r}m_{(p,2r)}A^p \geq B$ 退化为 $A \geq B$.

问题 如果存在 $t > 0$ 使对 $r \geq 0$ 及 $p \geq t$ 有 $M(p,r) \geq A^t$, 则是否有 $A \gg B$?

对两个正可逆算子 A, B, 其 **相对算子熵** 定义为

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}.$$

利用定理 4.2.1 易见有下列结果:

定理 4.2.4 [50] 设 A, B, C 是三个正可逆算子，则下列条件等价:

(1) $C \gg A \gg B$;

(2) 对一切 $p \geq 0$, $u \geq 0$, 有

$$\left(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}} \geq A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}};$$

(3) 对固定的 $p_0 > 0$, $u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$\left(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p_0+u}} \geq A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p_0+u}};$$

(4) 对一切 $p \geq 0$, $u \geq 0$, 有

$$\log \left(A^{\frac{u}{2}} C^p A^{\frac{u}{2}}\right) \geq \log A^{p+u} \geq \log \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right);$$

(5) 对固定的 $p_0 > 0$, $u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$\log \left(A^{\frac{u}{2}} C^{p_0} A^{\frac{u}{2}}\right) \geq \log A^{p_0+u} \geq \log \left(A^{\frac{u}{2}} B^{p_0} A^{\frac{u}{2}}\right);$$

(6) 对一切 $p \geq 0$, $u \geq 0$, 有

$$S(A^{-u}|C^p) \geq S(A^{-u}|A^p) \geq S(A^{-u}|B^p);$$

(7) 对固定的 $p_0 > 0$, $u_0 > 0$ 及任意的 $u \in [0, u_0]$, 有

$$S(A^{-u}|C^{p_0}) \geq S(A^{-u}|A^{p_0}) \geq S(A^{-u}|B^{p_0}).$$

关于两个算子的相对熵还有下列估计:

定理 4.2.5 设 A, B 是两个正可逆算子, 对任意正数 x_0, 下列不等式成立:

$$(\log x_0 - 1)A + \frac{B}{x_0} \geq S(A|B) \geq (1 - \log x_0)A - \frac{AB^{-1}A}{x_0}.$$

特别地, $S(A|B) = 0$ 当且仅当 $A = B$.

证 因为对任意两个正数 x, x_0, 有

$$\log x_0 - 1 + \frac{x}{x_0} \geq \log x \geq 1 - \log x_0 - \frac{1}{xx_0},$$

故

$$\begin{aligned} &\log x_0 - 1 + \frac{1}{x_0}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\geq \log\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &\geq 1 - \log x_0 - \frac{1}{x_0}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

两边同乘以 $A^{\frac{1}{2}}$ 可知结论成立. 在上式中令 $x_0 = 1$, $S(A|B) = 0$, 可得 $A = B$.

4.3 Furuta 不等式应用于算子的保序不等式

Furuta 已经证明: 如果 $A \geq B > 0$, 那么对任意 $r \geq 0$,

$$F(p) = \left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$

关于 $p \geq 1$ 是单调递增的. 但他指出这个结果在 $0 \leq p \leq 1$ 且 $r \geq 0$ 时并不成立. 本节则给出

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

成立的充分必要条件. 运用类似的方法, 本节给出在 $p \in [0,1]$ 条件下的某些算子不等式和一类算子函数的单调性 (可参见 [98]).

定理 4.3.1 如果 $-1 < r \leq -\frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, $A_1 \geq A_2 \geq B > 0$, 且 $\max\left\{-r, \frac{\alpha_2+1}{2}\right\} \leq \alpha_1 \leq 1$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}{A_1}^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}{A_2}^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.2 如果 $A \geq B > 0$, $-1 \leq r \leq -\frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha_2 \leq -1-2r$, 且 $\alpha_2 \leq \alpha_1 < -r$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.3 如果 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}$$

在以下任何一个条件成立时成立:

(i) $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{1-2r}{3}$ 且 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$;

(ii) $0 \leq -1-2r \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < -r \leq 1$;

(iii) $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \min\left\{\frac{1}{2}, -2r\right\}$.

定理 4.3.4 (1) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $0 \leq \alpha_1 < -r \leq \frac{\alpha_2}{2} \leq \frac{1}{4}$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 如果 $A \geq B > 0$, $0 \leq -r < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, 且 $-2r < \alpha_2$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_2+r}}.$$

定理 4.3.5 (1) 如果 $-1 \leq r \leq 0$, $\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-2r}{3}\right\} \leq \alpha_2 \leq \frac{1-r}{2}$, $-r < \alpha_1 \leq \alpha_2$, 且 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 如果 $\frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1$, $2\alpha_2 - 1 \leq \alpha_1 \leq \frac{3\alpha_2 - 1}{2}$, $\alpha_1 < -r < \alpha_2$, 且 $A \geq B > 0$, 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

推论 4.3.1 (1) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $-\frac{1}{4} < r \leq 0$, 那么 $F(\alpha) = \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha+r}}$ 关于 $\alpha \in \left[-2r, \frac{1}{2}\right]$ 是递增的.

(2) 如果 $A \geq B > 0$, 且 $-1 \leq r \leq -\frac{1}{2}$, 那么 $G(\alpha) = \left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha+r}}$ 关于 $\alpha \in [0, -1-2r]$ 是递减的.

主要结果的证明需要下列结果:

引理 4.3.A[43] 如果 $A > 0$, B 可逆, 那么

$$(BAB^*)^s = BA^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}} B^* B A^{\frac{1}{2}}\right)^{s-1} A^{\frac{1}{2}} B^* \qquad (*)$$

对任意实数 s 都成立.

定理 4.3.B[29],[69],[82],[116] 如果 $A \geq B \geq 0$, 且 $A > 0$, 那么下列结论成立 (如图 4-1):

(I) 若 $1 \geq p > t \geq 0$ 且 $p \geq \frac{1}{2}$, 则

$$A^{1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{1-t}{p-t}};$$

(II) 若 $1 \geq t > p \geq 0$ 且 $\frac{1}{2} \geq p$, 则

$$A^{-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{-t}{p-t}};$$

(III) 若 $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, 则

$$A^{2p-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-t}{p-t}};$$

(IV) 若 $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$, 则

$$A^{2p-1-t} \geq \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{2p-1-t}{p-t}}.$$

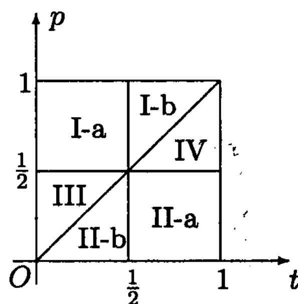


图 4-1 示意图

[30],[31] 中已给出定理 4.3.B 的推广. 在 [53],[54] 中给出定理 4.3.B 中 (I), (II), (III) 和 (IV) 的等价关系. 在 [82] 中给出定理 4.3.B 中 (I), (II) 和 (IV) 中指数的最优性的证明.

定理 4.3.1 的证明 因为 $\frac{1}{2} \leq -r < 1$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, 且 $A_2 \geq B > 0$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$A_2^{1-\alpha_2} \geq \left(A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A_2^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}. \tag{4.3.1}$$

另一方面, 因为 $\frac{1}{2} \leq \alpha_1 \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 < \alpha_1$, 且 $A_2^{-1} \geq A_1^{-1} > 0$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}} \geq A_2^{1-\alpha_2}. \tag{4.3.2}$$

令

$$X = (A_2^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A_2^{\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}, \quad Y = (A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}} A_1^{\alpha_1} A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}})^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_1-\alpha_2}},$$

由 (4.3.1) 和 (4.3.2), 得

$$Y \leq A_2^{\alpha_2-1} \leq X. \tag{4.3.3}$$

令 $\tilde{\alpha}=\dfrac{\alpha_2+r}{\alpha_2-1}$, $\tilde{r}=\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}$. 那么 $\dfrac{1}{2}\le\tilde{r}\le 1$, 且 $0\le\tilde{\alpha}<\tilde{r}$. 由定理 4.3.B (I) 和 (4.3.3), 可得

$$X^{1-\tilde{\alpha}}\ge\left(X^{\frac{-\tilde{\alpha}}{2}}Y^{\tilde{r}}X^{\frac{-\tilde{\alpha}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{r}-\tilde{\alpha}}}.$$

因为 $\dfrac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{r}-\tilde{\alpha}}=\dfrac{1+r}{\alpha_1+r}$, 所以

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}}X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}}\ge X^{\frac{1+r}{\alpha_2-1}}.\tag{4.3.4}$$

重复运用引理 4.3.A 和 (4.3.4), 得到以下结果:

$$\begin{aligned}
&\left(B^{\frac{r}{2}}A_1^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left(A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^rA_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1+r}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\left[A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\frac{\alpha_1}{2}}\right]^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+r}}A_1^{\frac{\alpha_1}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{-\alpha_1}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1+r}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}B^{-r}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}A_1^{\alpha_1}A_2^{-\frac{\alpha_2}{2}}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}}X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_1+r}}\\
&\qquad\cdot\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&\ge B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1+r}{\alpha_2-1}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=B^{\frac{r}{2}}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\left(A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}-1}A_2^{\frac{\alpha_2}{2}}B^{\frac{r}{2}}\\
&=\left(B^{\frac{r}{2}}A_2^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{\alpha_2+r}}.
\end{aligned}$$

由定理 4.3.1 的证明我们得到前面的比较引理：

比较引理 令 $A>0$, $B>0$, 且 $\beta,r,\alpha_1,\alpha_2$ 为满足下列条件的任意实数：$\alpha_1+r\neq 0$, $\alpha_2+r\neq 0$. 那么

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\geq\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}$$

当且仅当

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha_1+r}}\geq\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha_2+r}}.$$

引理 4.3.1 如果 $A\geq B>0$, 那么对 $\frac{1}{2}\leq r\leq 1$, 且 $-r<\alpha\leq 0$,

$$\left(A^{\frac{r}{2}}B^{\alpha}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-r}{\alpha+r}}\geq A^{1-r}.$$

证 若 $\frac{1}{2}\leq-\alpha$, 则由定理 4.3.B (IV) 可知

$$A^{-2\alpha-1-r}\geq\left(A^{\frac{-r}{2}}B^{-\alpha}A^{\frac{-r}{2}}\right)^{\frac{-2\alpha-1-r}{-\alpha-r}}=\left(A^{\frac{r}{2}}B^{\alpha}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-2\alpha-1-r}{\alpha+r}}.$$

因为 $\frac{1-r}{2\alpha+1+r}\in[0,1]$, 由 L-H 不等式可知

$$A^{-(1-r)}\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^{\alpha}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-(1-r)}{\alpha+r}}.$$

若 $0\leq-\alpha\leq\frac{1}{2}$, 则由定理 4.3.B (II) 可知

$$A^{-r}\geq\left(A^{\frac{-r}{2}}B^{-\alpha}A^{\frac{-r}{2}}\right)^{\frac{-r}{-\alpha-r}}=\left(A^{\frac{r}{2}}B^{\alpha}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-r}{\alpha+r}}.$$

因为 $\frac{1-r}{r}\in[0,1]$, 由 L-H 不等式可得

$$A^{-(1-r)}\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^{\alpha}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{-(1-r)}{\alpha+r}}$$

引理 4.3.1 得证.

定理 4.3.2 的证明 因为 $\frac{1}{2} \le -r \le 1$, $0 \le \alpha_2 < -r$, 由定理 4.3.B (I) 可知

$$A^{1-\alpha_2} \ge \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令 $X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}$, $Y = A^{\alpha_2-1}$, 则 $Y \le X$. 令

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2 - 1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - 1},$$

可得 $\frac{1}{2} \le \tilde{r} \le 1$, 且 $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \le 0$. 由引理 4.3.1 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}} \ge X^{1-\tilde{r}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}\right)^{\frac{-(1+r)}{\alpha_1+r}} \ge X^{\frac{-(1+r)}{\alpha_2-1}}. \tag{4.3.5}$$

因为 (4.3.5) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-(1+r)}{\alpha_1+r}}$$
$$\ge \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-(1+r)}{\alpha_2+r}},$$

由比较引理可知定理 4.3.2 得证.

定理 4.3.3 的证明 (1) 假设条件 (i) 成立. 由 $\frac{1}{2} \le \alpha_2 \le 1$, $-\alpha_2 < r \le 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}} \ge A^{1-\alpha_2}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2},$$
$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{1 - \alpha_2}.$$

我们可知 $X \ge Y$, 且 $0 \le -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \le \frac{1}{2}$. 再由定理 4.3.B (II) 得

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{\frac{-\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}. \quad (4.3.6)$$

故由比较引理，得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

(2) 假设条件 (ii) 成立. 因为 $\frac{1}{2} \leq -r < 1$, $0 \leq \alpha_2 < -r$, 故由定理 4.3.B (I) 可知

$$A^{1-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2-1},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2+r}{\alpha_2-1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}.$$

则 $Y \leq X$, $0 \leq -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \leq \frac{1}{2}$. 再由定理 4.3.B (II) 可得

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{-\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-1}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2(\alpha_2-1)}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_2-1}}. \quad (4.3.7)$$

因为 (4.3.7) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^r A^{\frac{\alpha_2}{2}},$$

从而由比较引理得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

(3) 假设条件 (iii) 成立. 由 $0 \leq -r < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ 及定理 4.3.B (II) 可知

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$ 且 $0 \leq -\tilde{\alpha} < \tilde{r} \leq \frac{1}{2}$. 又由定理 4.3.B (II) 可知

$$X^{-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{-\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left(X^{\frac{\alpha_2+r}{2\alpha_2}} Y^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}} X^{\frac{\alpha_2+r}{2\alpha_2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq X^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_2}}. \tag{4.3.8}$$

因为 (4.3.8) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{\alpha_1-\alpha_2} \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}.$$

由比较引理，得

$$\left(B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_1} B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2+r}{\alpha_1+r}} \geq B^{\frac{r}{2}} A^{\alpha_2} B^{\frac{r}{2}}.$$

定理 4.3.4 的证明 (1) 由 $0 < -r < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, $A \geq B > 0$ 及定理 4.3.B (II) 可得

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}} B^{-r} A^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}} B^{r} A^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2 + r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$ 且 $\frac{1}{2} \leq \tilde{r} < -\tilde{\alpha} \leq 1$. 由定理 4.3.B (I) 可得

$$X^{1-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}} Y^{-\tilde{\alpha}} X^{-\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}} Y^{\tilde{\alpha}} X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}}. \tag{4.3.9}$$

因为 (4.3.9) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{r}{\alpha_1+r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{r}{\alpha_2+r}},$$

由比较引理, (1) 得证.

(2) 因为 $0 \leq -r < \alpha_2 \leq \dfrac{1}{2}$, 且 $A \geq B > 0$, 由定理 4.3.B (II) 可得

$$A^{-\alpha_2} \geq \left(A^{\frac{-\alpha_2}{2}}B^{-r}A^{\frac{-\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{-\alpha_2-r}} = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2+r}}.$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{\alpha_2},$$

$$\tilde{r} = \frac{\alpha_2+r}{\alpha_2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}.$$

则 $Y \leq X$, $\dfrac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \leq 0$. 由引理 4.3.1 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}}Y^{\tilde{\alpha}}X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}} \geq X^{1-\tilde{r}}. \tag{4.3.10}$$

因为 (4.3.10) 等价于

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-r}{\alpha_1+r}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{-r}{\alpha_2+r}},$$

由比较引理可知, 定理 4.3.4 得证.

定理 4.3.5 的证明 (1) 由 $\dfrac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$, $-\alpha_2 < r \leq 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}} \geq A^{1-\alpha_2}. \tag{4.3.11}$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2+r}{1-\alpha_2}.$$

可得 $X \geq Y$, $\dfrac{1}{2} \leq \tilde{r} \leq 1$, $-\tilde{r} < \tilde{\alpha} \leq 0$. 再由引理 4.3.1 和 (4.3.11) 可得

$$\left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}}Y^{\tilde{\alpha}}X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}} \geq X^{1-\tilde{r}},$$

也就是说，

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}}$$
$$> \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

由比较引理可得

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \geq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

(2) 由 $\frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1$, $-\alpha_2 < r \leq 0$ 及引理 4.3.1 可得

$$\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}} \geq A^{1-\alpha_2}. \tag{4.3.12}$$

令

$$X = \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2+r}}, \quad Y = A^{1-\alpha_2},$$
$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}, \quad \tilde{r} = \frac{\alpha_2+r}{1-\alpha_2}.$$

可得 $X \geq Y$, $\frac{1}{2} \leq -\tilde{\alpha} \leq 1$, $0 \leq \tilde{r} < -\tilde{\alpha} \leq 1$. 再由定理 4.3.B (I) 和 (4.3.12) 可得

$$X^{1-\tilde{r}} \geq \left(X^{\frac{-\tilde{r}}{2}}Y^{-\tilde{\alpha}}X^{-\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{-\tilde{\alpha}-\tilde{r}}} = \left(X^{\frac{\tilde{r}}{2}}Y^{\tilde{\alpha}}X^{\frac{\tilde{r}}{2}}\right)^{\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\alpha}+\tilde{r}}},$$

即

$$\left[\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\alpha_1-\alpha_2}\left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2\alpha_2-1+r}{\alpha_1+r}}$$
$$\geq \left(A^{\frac{\alpha_2}{2}}B^rA^{\frac{\alpha_2}{2}}\right)^{\frac{2\alpha_2-1+r}{\alpha_2+r}}.$$

由比较引理，得

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_1+r}} \leq \left(B^{\frac{r}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1-2\alpha_2-r}{\alpha_2+r}}.$$

推论 4.3.1 的证明　(1) 因为 $-r \leq -2r$, 由定理 4.3.4 (2), 得 (1). (2) 因为 $-1-2r \leq -r$, 由定理 4.3.2 得 (2).

4.4 Furuta 不等式应用于算子方程

设 H 是 Hilbert 空间，T 是 H 到 H 内的有界线性算子. 若 T 是 1-1 的且 T 的值域 $R(T)$ 在 H 中稠密，则称 T 为**非奇异算子**.

假设 N 和 K 是 H 上的正算子，且 N 是非奇异算子，G. K. Pedersen 和 M.Takesaki 首先研究了算子方程 $TNT = K$，并作为非可换 Radon Nikodym 定理的一个有用工具. 这里，借助于他们的结果的一个推广，我们证明如下定理：

定理 4.4.1 设 N, K 是 H 上的正算子，且 N 是非奇异算子. 如果存在一个正算子 T 使得对某自然数 n,

$$T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K,$$

则对任意自然数 $m \le n$，存在正算子 T_1 使

$$T_1\left(N^{\frac{1}{m}}T_1\right)^m = K,$$

并且对各种情况而言，解 T 及 T_1 都至多是唯一的.

为证明本定理，需要下面一个引理.

引理 4.4.1[46] 设 N 和 K 是正算子，且 N 是非奇异算子，则对一个自然数 n，下面两个条件等价：

(1) 对某个 $a > 0$，有 $aN^{\frac{1}{n}} \ge \left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;

(2) 存在一个正算子 T 使 $T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n = K$,

其中 (2) 中的解 T 是唯一的且满足 $\| T \| \le a$.

注 如果 N 是一个可逆算子 (或更一般地，对某个 $a > 0$，有 $a^{n+1}N \ge K$)，则条件 (1) 成立，且当 N 可逆时，(2) 中的解 T 可由下式给出：

$$T = N^{-\frac{1}{2n}}\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}N^{-\frac{1}{2n}}.$$

为证明引理 4.4.1，需要下述定理 4.4.A.

定理 4.4.A 设 A 和 B 是 H 上的有界线性算子，则对某个 $\lambda \geq 0$, $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$ 当且仅当存在算子 C 使 $A = BC$ 且 $\| C \| \leq \lambda$.

证 ($\Leftarrow$) 如果 $A = BC$, 则

$$AA^* = BCC^*B^* = \| C \|^2 BB^* - B(\| C \|^2 - CC^*)B^*$$
$$\leq \| C \|^2 BB^*.$$

($\Rightarrow$) 设对某个 $\lambda \geq 0$, $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$. 定义算子 $D : R(B^*) \to R(A^*)$, 使得 $B^*x \mapsto A^*x$. 若 $x \in \overline{R(B^*)}$, 取 $y_n = B^*g_n$ 使 $y_n \to x$. 定义 $Dx = \lim\limits_{n\to\infty} Dy_n$, 因为

$$\| Dy_n - Dy_m \|^2 \leq \lambda^2 \| y_n - y_m \|^2,$$

若存在 $z_n \to x$, 则有

$$\| Dy_n - Dz_n \|^2 \leq \lambda^2 \| y_n - z_n \|^2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故 D 是有定义的. 由于

$$\| D(B^*f) \|^2 = \| A^*f \|^2 = (AA^*f, f) \leq \lambda^2(BB^*f, f)$$
$$= \lambda^2 \| B^*f \|^2,$$

因此 D 可被唯一有界地延拓到 $R(B^*)$ 的闭包上. 规定 $D|_{\overline{R(B^*)}^\perp} = 0$, 则 $DB^* = A^*$.

引理 4.4.1 的证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 4.4.A 知, (1) 必蕴含一个算子 S 使

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}} = N^{\frac{1}{2n}}S = S^*N^{\frac{1}{2n}}.$$

令 $T = SS^*$, 显见 $\|T\| \leq a$ (可由定理 4.4.A, 因 $N^{\frac{1}{2n}}SS^*N^{\frac{1}{2n}} \leq aN^{\frac{1}{n}}$) 且

$$N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}} = \left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1} = N^{\frac{1}{2n}}T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n N^{\frac{1}{2n}}.$$

由于 N 非奇异, 故 $K = T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 由 (2) 知

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\left[\left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}}=N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\leq aN^{\frac{1}{n}}.$$

假若 $T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n=K=Z\left(N^{\frac{1}{n}}Z\right)^n$，则易知

$$\left(N^{\frac{1}{2n}}TN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}=\left(N^{\frac{1}{2n}}ZN^{\frac{1}{2n}}\right)^{n+1}.$$

由 N 非奇异知 $T=Z$.

引理 4.4.2 设 A,B 是正算子，α,β 是满足 $\alpha\geq\beta>0$ 的实数，且 a 是正实数，则条件

(i) $aA^{\frac{1}{\alpha}}\geq\left(A^{\frac{1}{2\alpha}}BA^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$

蕴含条件

(ii) $a^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}A^{\frac{1}{\beta}}\geq\left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$.

证 假若 (i) 成立，令 $p=\alpha+1$, $q=\beta+1$ 及 $r=\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}$，则有

$$(1+2r)q=p+2r=\alpha+\frac{\alpha}{\beta},$$

且 $r\geq0$, $q\geq1$, $p\geq0$. 故由 Furuta 不等式知

$$\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{p+2r}{q}}\geq\left[\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^r\left(A^{\frac{1}{2\alpha}}BA^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{\frac{p}{\alpha+1}}\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^r\right]^{\frac{1}{q}},$$

即

$$\left(aA^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\geq a^{\frac{2r}{\beta+1}}\left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

由 $\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{2r}{\beta+1}=\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}$，得

$$a^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}A^{\frac{1}{\beta}}\geq\left(A^{\frac{1}{2\beta}}BA^{\frac{1}{2\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

定理 4.4.1 的证明 设 N 和 K 是正算子，且 N 是非奇异的. 假若存在正算子 T 使对某个自然数 n，有 $T\left(N^{\frac{1}{n}}T\right)^n=K$，由引理 4.4.1，对某个 $a>0$，有

$$aN^{\frac{1}{n}}\geq\left(N^{\frac{1}{2n}}KN^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

再由引理 4.4.2, 对任意自然数 $m \leq n$, 有

$$a^{\frac{n+1}{m+1}} N^{\frac{1}{m}} \geq \left(N^{\frac{1}{2m}} K N^{\frac{1}{2m}}\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

利用引理 4.4.1, 存在正算子 T_1, 使 $T_1\left(N^{\frac{1}{m}}T_1\right)^m = K$.

唯一性由引理 4.4.1 可得.

如果上述条件 $m \leq n$ 改为 $m > n$, 则结果未必成立, 我们有

定理 4.4.2[11] 设自然数 m, n 满足 $m < n$, 则必可找到一个非奇异正算子 N 及一个正算子 K 使

(1) 存在算子 T 使 $T\left(N^{\frac{1}{m}}T\right)^m = K$;

(2) 不存在算子 S 使 $S\left(N^{\frac{1}{n}}S\right)^n = K$.

首先我们有下述引理:

引理 4.4.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为实数, 则对任意自然数 j, $A^{j+1} = (1+a^2)^j A$ 及 $\|A\| = 1 + a^2$.

定理 4.4.2 的证明 首先考虑 2 维 Hilbert 空间 X 上的下列算子 A_k, B_k:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{-4} \end{pmatrix}, \ B_k = \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1 & k^{-1} \\ k^{-1} & k^{-2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

假设 $N = \bigoplus\limits_{k=1}^{+\infty} A_k^m$ 及 $K = \bigoplus\limits_{k=1}^{+\infty} K_k$ 定义于空间

$$Y = X \oplus X \oplus \cdots = \left\{(x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty\right\}$$

上, 其中 $K_k = A_k^{-\frac{1}{2}} B_k^{m+1} A_k^{-\frac{1}{2}}$. $(y, z) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(y_i, z_i)$, $Ny = (A_k^m y_k)_{k=1}^{+\infty}$.
由引理 4.4.3 知

$$K_k = A_k^{-\frac{1}{2}} B_k^{m+1} A_k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{k^2+1} k^{-2m} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix}.$$

故 $\|K_k\| = \frac{1}{k^{2m}}$, 当 $k \geq 1$ 时, K 可被定义. 事实上, 易见

$$\|Kx\|^2 \leq \|x\|^2,$$

由 N 定义知, N 是非奇异的正算子且 K 是 Y 上的正算子.

$$N^{\frac{1}{m}} - \left(N^{\frac{1}{2m}} K N^{\frac{1}{2m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} = \bigoplus_{k=1}^{+\infty}(A_k - B_k) \geq 0.$$

由引理 4.4.1 知存在算子 T 使 $T\left(N^{\frac{1}{m}}T\right)^m = K$.

现假设存在算子 S 使 $S\left(N^{\frac{1}{n}}S\right)^n = K$, 则由引理 4.4.1 应有

$$bN^{\frac{1}{n}} \geq \left(N^{\frac{1}{2n}} K N^{\frac{1}{2n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \text{对某个 } b > 0,$$

即

$$b \geq A_k^{-\frac{m}{2n}} \left(A_k^{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-1\right)} B_k^{m+1} A_k^{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-1\right)}\right)^{\frac{1}{n+1}} A_k^{-\frac{m}{2n}}.$$

通过利用引理 4.4.3 计算, 得

$$b \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{2\left(1-\frac{m}{n}\right)} \end{pmatrix} \frac{1}{k^{2(m+1)}(k^2+1)}\right.$$

$$\left.\cdot \begin{pmatrix} k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{2\left(1-\frac{m}{n}\right)} \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix},$$

即

$$b \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\frac{k^2}{k^{2(m+1)}(k^2+1)} \begin{pmatrix} 1 & k^{1-\frac{2m}{n}} \\ k^{1-\frac{2m}{n}} & k^{2-\frac{4m}{n}} \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix}.$$

回忆引理 4.4.3, 有 $A^{\frac{1}{n+1}} = \dfrac{A}{(1+a^2)^{\frac{n}{n+1}}}$, 知上式等价于

$$b \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix} \left[\frac{1}{k^{2m}(k^2+1)}\right]^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{\left(1+k^{2-\frac{4m}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & k^{1-\frac{2m}{n}} \\ k^{1-\frac{2m}{n}} & k^{2-\frac{4m}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{\frac{2m}{n}} \end{pmatrix}.$$

故

$$b \geq \frac{1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{n+1}}\left(1+k^{2-\frac{4m}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{pmatrix} \right\|.$$

从而

$$b \geq \frac{k^2+1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{n+1}}\left(1+k^{2\left(1-\frac{2m}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{n+1}}}.$$

由定理 4.4.1 知，只需证明 $n=m+1$ 时的情况. 如果 $n=m+1$, 则

$$b \geq \frac{k^2+1}{\left[k^{2m}(k^2+1)\right]^{\frac{1}{m+2}}\left(1+k^{2\frac{1-m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}.$$

因为 $\max\left\{\dfrac{2}{m+1}, \dfrac{2m}{m+1}\right\} < 2$, 所以

$$b \geq \left(\frac{1+k^2}{k^{\frac{2m}{m+1}} + k^{\frac{2}{m+1}}}\right)^{\frac{m+1}{m+2}} \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

矛盾.

4.5 与广义 Furuta 不等式相应的算子单调函数

作为 Furuta 不等式的一个推广，我们有如下结果:

定理 4.5.1[43],[50] 设 $A \geq B \geq 0$ 且 $A > 0$, 则对每个 $t \in [0,1]$ 及 $p \geq 1$ 有

$$F_{p,t}(A,B,r,s)=A^{\frac{-r}{2}}\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}} \tag{4.5.1}$$

是 $s\geq 1$ 及 $r\geq t$ 上关于 r 和 s 的递降函数，且有

$$A^{1-t}=F_{p,t}(A,A,r,s)\geq F_{p,t}(A,B,r,s)$$

对一切 $s\geq 1$, $p\geq 1$ 且 $r\geq t\geq 0$ 成立.

证 不妨设 $B>0$. 首先证明 $F_{p,t}(A,B,r,s)$ 是 s 的降函数.

第一步，当 $1\leq s\leq 2$ 时，对一切 $t\in[0,1]$ 有 $A^{-t}\leq B^{-t}$. 由降幂定理及 L-H 不等式得

$$\begin{aligned}A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}} &= A^{\frac{r-t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\left(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}}\right)^{s-1}B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{r-t}{2}}\\ &\leq A^{\frac{r-t}{2}}B^{(p-t)s+t}A^{\frac{r-t}{2}}.\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{1-t+r}{(p-t)s+r}\in[0,1]$, 利用 L-H 不等式及 Furuta 不等式，得

$$\begin{aligned}\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} &\leq \left(A^{\frac{r-t}{2}}B^{(p-t)s+t}A^{\frac{r-t}{2}}\right)^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}\\ &\leq A^{1-t+r}.\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

第二步，当 $1\leq s\leq 2$ 时，令

$$A_1=A^{1-t+r},\quad B_1=\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}},$$

则 $A_1\geq B_1\geq 0$, 故当 $t_1\in[0,1]$ 时，由第一步又知

$$\begin{aligned}&\left[A_1^{\frac{r_1}{2}}\left(A_1^{\frac{-t_1}{2}}B_1^{p_1}A_1^{\frac{-t_1}{2}}\right)^{s_1}A_1^{\frac{r_1}{2}}\right]^{\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1}}\\ &\leq \left(A_1^{\frac{r_1-t_1}{2}}B_1^{(p_1-t_1)s_1+t_1}A_1^{\frac{r_1-t_1}{2}}\right)^{\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1}}\\ &\leq A_1^{1-t_1+r_1}\end{aligned}$$

对一切 $s_1\in[1,2]$, $p_1\geq 1$ 及 $r_1\geq t_1\geq 0$ 成立.

若令

$$p_1=\frac{(p-t)s+r}{1-t+r}\geq 1,\quad r_1=t_1=\frac{r}{1-t+r}\in[0,1],$$

则

$$\frac{1-t_1+r_1}{(p_1-t_1)s_1+r_1}=\frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r},$$

$$A_1^{\frac{r_1}{2}}=A_1^{\frac{t_1}{2}}=A^{\frac{r}{2}},\quad B_1^{p_1}=A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}.$$

故

$$A_1\geq B_1\geq\left\{A^{\frac{r}{2}}\left[A^{-\frac{r}{2}}A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}A^{-\frac{r}{2}}\right]^{s_1}A^{\frac{r}{2}}\right\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r}},$$

即

$$\begin{aligned}A^{1-t+r}&\geq\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}\\&\geq\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^{ss_1}A^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)ss_1+r}}.\end{aligned}\tag{$*$}$$

在上式中，由 $1\leq s\leq 1$, $1\leq s_1\leq 2$ 知 $1\leq ss_1\leq 4$, 故由 $(*)$ 式可知 (4.5.2) 两端对一切 $1\leq s\leq 4$ 成立．类似可得 (4.5.2) 两端对一切 $s\geq 1$ 成立，且由 $(*)$ 式可知 $F_{p,t}(A,B,r,s)$ 关于一切 $s\geq 1$ 单调下降．

下面证明 $F_{p,t}(A,B,r,s)$ 关于 r 递降．由 $(*)$ 式有

$$A^{1-t}\geq A^{\frac{-r}{2}}\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{\frac{-r}{2}}\tag{4.5.3}$$

对一切 $s\geq 1$, $p\geq 1$ 及 $r\geq t$ 成立．由 (4.5.3) 及降幂引理，得

$$\begin{aligned}&\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}A^{1-t}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}\\&\quad\geq\left[\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{s}{2}}A^r\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{\frac{s}{2}}\right]^{\frac{1-t-(p-t)s}{(p-t)s+r}}.\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

令

$$A_2=\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}A^{1-t}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}},$$

$$B_2=\left[\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}A^{-r}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]^{\frac{-(1-t)+(p-t)s}{(p-t)s+r}},$$

则 $A_2\geq B_2$ 且 $A_2>0$, $B_2>0$. 重复第一步中证明，对 $t_2\in[0,1]$ 有

$$A_2^{1-t_2+r_2} \geq \left(A_2^{\frac{r_2-t_2}{2}} B_2^{(p_2-t_2)s_2+t_2} A_2^{\frac{r_2-t_2}{2}}\right)^{\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2}}$$

$$\geq \left[A_2^{\frac{r_2}{2}} \left(A_2^{-\frac{t_2}{2}} B_2^{p_2} A_2^{-\frac{t_2}{2}}\right)^{s_2} A_2^{\frac{r_2}{2}}\right]^{\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2}} \tag{4.5.5}$$

对一切 $1 \leq s_2 \leq 2$, $p_2 \geq 1$ 及 $r_2 \geq t_2$ 成立. 令

$$r_2 = t_2 = 1, \quad p_2 = \frac{(p-t)s+r}{(p-t)s-(1-t)} \geq 1,$$

则

$$B_2^{p_2} = \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}},$$

且

$$\frac{1-t_2+r_2}{(p_2-t_2)s_2+r_2} = \frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r+(1-t+r)(s_2-1)}. \tag{4.5.6}$$

令 $D = \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}$, 则

$$\begin{aligned}
&A_2^{\frac{r_2}{2}} (A_2^{-\frac{t_2}{2}} B_2^{p_2} A_2^{-\frac{t_2}{2}})^{s_2} A_2^{\frac{r_2}{2}} \\
&= A_2^{\frac{1}{2}} \left[A_2^{-\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A_2^{-\frac{1}{2}}\right]^{s_2} A_2^{\frac{1}{2}} \\
&= DA^{-\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{r}{2}} D A_2^{-1} D A^{-\frac{r}{2}}\right)^{s_2-1} A^{-\frac{r}{2}} D \\
&= DA^{-\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{r}{2}} A^{t-1} A^{-\frac{r}{2}}\right)^{s_2-1} A^{-\frac{r}{2}} D \\
&= \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r-(1-t+r)(s_2-1)} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

故由 (4.5.5),(4.5.6),(4.5.7) 知

$$\begin{aligned}
&\left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{1-t} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} \\
&= A_2 \geq B_2 \\
&= \left[\left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{-r} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]^{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r}} \\
&\geq \left[\left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}} A^{-(r+\varepsilon)} \left(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]^{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r+\varepsilon}},
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

其中 $\varepsilon=(1-t+r)(s_2-1)$. 由于 $1\le s_2\le 2$, $t\in[0,1]$, $r\ge t$, 知 $\varepsilon\ge 0$. 令 $r_2=r+\varepsilon$, 对 (4.5.8) 应用两次降幂引理，得

$$\begin{aligned}A^{1-t}&\ge A^{-\frac{r}{2}}\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{-\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}A^{-\frac{r}{2}}\\&\ge A^{-\frac{r_2}{2}}\left[A^{\frac{r_2}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r_2}{2}}\right]^{\frac{1-t+r_2}{(p-t)s+r_2}}A^{-\frac{r_2}{2}}\end{aligned}$$

对任意的 r_2,r 使 $r_2\ge r\ge t$ 及 $s\ge 1$, $p\ge 1$, $t\in[0,1]$ 成立. 从而 $F_{p,t}(A,B,r,s)$ 是 $r\ge 0$ 的降函数.

注　该定理可用定理 G 的结果进行简单的证明.

推论 4.5.1　设 $A\ge B\ge 0$ 且 $A>0$, 则对每个 $t\in[0,1]$,

$$A^{((p-t)s+r)\alpha}\ge\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\alpha}$$

对一切 $s\ge 0$, $p\ge 0$, $0\le\alpha\le 1$ 且 $r\ge t$ 使 $(s-1)(p-1)\ge 0$ 及 $1-t+r\ge[(p-t)s+r]\alpha$ 成立.

证　当 $0\le s\le 1$ 且 $0\le p\le 1$ 时，结果由 L-H 不等式易得；当 $s\ge 1$, $p\ge 1$ 时，由定理 4.5.1 及 L-H 不等式易得.

推论 4.5.2　若 $A\ge B\ge 0$ 且 $A>0$, 则

$$A^r\ge\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{r}{(p-1)s+r}}$$

对一切 $s\ge 1$, $p\ge 1$ 及 $r\ge 1$ 成立.

由定理 4.5.1 中令 $t=1$ 即可.

当 $s=r$ 时，上面的推论变为下面的 Ando 及 Hiai 的一个结论.

定理 4.5.2　设 $A\ge B\ge 0$ 且 $A>0$, 则

$$A^r\ge\left[A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}}\right)^rA^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

对一切 $p\ge 1$ 及 $r\ge 1$ 成立.

推论 4.5.3　设 $A\ge B\ge 0$ 且 $A>0$, 则对每个 $t\in[0,1]$, 当 $2p\ge 1+t$ 时有

(1) $A^{1+t} \geq \left(A^{\frac{t}{2}}B^{2p-t}A^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{1+t}{2p}} \geq \left|A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{\frac{t}{2}}\right|^{\frac{1+t}{p}}$;

(2) $A^{2} \geq \left(A^{\frac{1}{2}}B^{2p-t}A^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{2p+1-t}} \geq \left|A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{\frac{t}{2}}\right|^{\frac{4}{2p+1-t}}$.

证 类似定理 4.5.1 中第一部分证明，令 $s=2$ 及 $r=2t$, 由

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}=\frac{1+t}{2p}\leq 1$$

及 (4.5.2) 可得

$$\begin{aligned}A^{1+t} &\geq \left(A^{\frac{t}{2}}B^{2p-t}A^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{1+t}{2p}}\\ &\geq \left[A^{t}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{-\frac{t}{2}}\right)^{2}A^{t}\right]^{\frac{1+t}{2p}}\\ &= \left|A^{-\frac{t}{2}}B^{p}A^{\frac{t}{2}}\right|^{\frac{1+t}{p}}.\end{aligned}$$

同理，令 $s=2$, $r=1+t$ 可得 (2).

推论 4.5.4 设 $A\geq B\geq 0$ 且 $A>0$, 则

$$A^{2} \geq \left(A^{\frac{1}{2}}B^{2p-1}A^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left|A^{-\frac{1}{2}}B^{p}A^{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{2}{p}} \quad (p\geq 1).$$

推论 4.5.5 设 $A\geq B\geq 0$, 则

$$G(p,r)=A^{-\frac{r}{2}}\left(A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}A^{-\frac{r}{2}}$$

是 p 及 r 的降函数，其中 $p\geq 1$ 及 $r\geq 0$.

只需在定理 4.5.1 中令 $t=0$, $p=1$ 且用 p 代替 s 即可证明.

4.6 Furuta 不等式在 Kantorovich 型不等式中的应用

本节中我们先给出混序的算子方程的特征，进而研究混序时的 Kantorovich 型不等式. 首先给出下列引理:

引理 4.6.1 设 T 是非奇异正算子. 如果 $XTX = YTY$ 对某 $X \geq 0$ 及 $Y \geq 0$ 成立, 则 $X = Y$.

证 由 $XTX = YTY$, 易知 $\left(T^{\frac{1}{2}}XT^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(T^{\frac{1}{2}}YT^{\frac{1}{2}}\right)^2$, 从而

$$T^{\frac{1}{2}}XT^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}YT^{\frac{1}{2}}.$$

再由 T 是非奇异正算子得结论成立.

引理 4.6.2 设 $0 < m \leq A \leq M$, 且 B 是正压缩算子, 则

$$\frac{(m+M)^2}{4mM}A \geq BAB.$$

证 由 Kantorovich 不等式, 知

$$(ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}\|Bx\|^4.$$

再由施瓦茨不等式, 得

$$\begin{aligned}
(ABx, Bx)(A^{-1}Bx, Bx) &\leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(B^2x, x)^2 \\
&\leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(Bx, x)^2 \\
&= \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(A^{-\frac{1}{2}}Bx, A^{\frac{1}{2}}x\right)^2 \\
&\leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(A^{-1}Bx, Bx)(Ax, x).
\end{aligned}$$

注 引理 4.6.2 中的结果不能换为 $A \geq BAB$. 事实上, 只要令

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

即可证明.

定理 4.6.1[58] 设 $A, B > 0$, 则下列条件等价:

(1) $A \gg B$;

(2) 对每个 $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$ 及 $u \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = TA^{(p+\alpha u)s}T,$$

其中 $s \geq 1$, $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$;

(3) 对每个 $\alpha \in [0,1]$ 及 $p \geq u \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = TA^{(p+\alpha u)s}T,$$

其中 $s \geq 1$;

(4) 对每个 $p \geq 0$, 存在唯一的正可逆压缩 T 满足

$$B^p = TA^pT.$$

证 (1)$\Rightarrow$(2) 由于 $A \gg B$ 等价于对一切 $p, u \geq 0$ 有

$$A^u \geq \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}}. \tag{4.6.1}$$

令 $A_1 = A^u$, $B_1 = \left(A^{\frac{u}{2}} B^p A^{\frac{u}{2}}\right)^{\frac{u}{p+u}}$, 则由广义的 Furuta 不等式知对每个 $t \in [0,1]$,

$$A_1^{\frac{(p_1-t)s+r}{q}} \geq \left[A_1^{\frac{r}{2}}\left(A_1^{-\frac{t}{2}} B_1^{p_1} A_1^{-\frac{t}{2}}\right)^s A_1^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.6.2}$$

在条件 $s \geq 1$, $p_1 \geq 1$, $q \geq 1$, $r \geq t$ 及 $(1-t+r)q \geq (p_1-t)s+r$ 下成立. 设 $u > 0$, 令

$$p_1 = \frac{p+u}{u} \geq 1, \quad q = 2, \quad r = (p_1 - t)s,$$

则 $(1-t+r)q \geq (p_1-t)s+r$ 显然成立, 而 $r \geq t$ 等价于 $[p+u(1-t)]s \geq ut$, 再把 $1-t$ 换为 α, 则在 (2) 的条件下有

$$I \geq A^{-\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\left[A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{(p+\alpha u)s}{2}}. \tag{4.6.3}$$

令上式右端为 T, 则 T 是正压缩算子, 且有

$$A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} TA^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}} = \left[A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\left(A^{\frac{\alpha u}{2}} B^p A^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s A^{\frac{(p+\alpha u)s}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

两边平方，可得

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s = TA^{(p+\alpha u)s}T.$$

容易验证上式当 $u=0$ 时也成立，唯一性由引理 4.6.1 可得.

(2)$\Rightarrow$(3) 显然成立.

(3)$\Rightarrow$(4) 令 $u=0$, $s=1$ 即可.

(4)$\Rightarrow$(1) 由 (4) 知

$$\left(A^{\frac{p}{2}}TA^{\frac{p}{2}}\right)^2 = A^{\frac{p}{2}}TA^pTA^{\frac{p}{2}} = A^{\frac{p}{2}}B^pA^{\frac{p}{2}}.$$

由 L-H 不等式及定理 4.2.A 可知结论成立.

应用定理 4.6.1 及引理 4.6.2 易得下面定理:

定理 4.6.2[58] 设 $B>0$, $0<m\le A\le M$, 则下列条件等价:

(1) $A\gg B$;

(2) 对每个 $\alpha\in[0,1]$, $p\ge 0$ 及 $u\ge 0$,

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s \le \frac{(M^{(p+\alpha u)s}+m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s}m^{(p+\alpha u)s}}A^{(p+\alpha u)s},$$

其中 $s\ge 1$, $(p+\alpha u)s\ge(1-\alpha)u$;

(3) 对每个 $\alpha\in[0,1]$ 及 $p\ge u\ge 0$,

$$\left(A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}}\right)^s < \frac{(M^{(p+\alpha u)s}+m^{(p+\alpha u)s})^2}{4M^{(p+\alpha u)s}m^{(p+\alpha u)s}}A^{(p+\alpha u)s},$$

其中 $s\ge 1$;

(4) 对每个 $p\ge 0$,

$$\frac{(M^p+m^p)^2}{4M^pm^p}A^p\ge B^p.$$

下面考虑混序下的 Kantorovich 型不等式.

引理 4.6.3 假设

$$K_+(m,M,p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-Mm^p)^{p-1}},$$

$$K_1(h,p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(h^p-1)^p}{(h-1)(h^p-h)^{p-1}},$$

以及 $h=\dfrac{M}{m}$, $h_n=\dfrac{1+\frac{1}{n}\log M}{1+\frac{1}{n}\log m}$, 其中 n 为自然数. 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)^n=h^{\frac{1}{h^p-1}} \tag{4.6.4}$$

及

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}K_+\left(1+\frac{1}{n}\log m,1+\frac{1}{n}\log M,np\right)\\&=\lim_{n\to\infty}K_1(h_n,np)=M_h(p),\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

其中 $M_h(p)=\dfrac{1}{p\,\mathrm{e}\log h}(h^p-1)h^{\frac{p}{h^p-1}}$.

证 令

$$f(n)=\left(\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)^n.$$

则当 $n\to\infty$ 时, $h_n\to1$, $h_n^n\to h$. $\log f(n)$ 是 $0\cdot\infty$ 型, 应用洛必达法则, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dn}\left(\log\dfrac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)}{\dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{1}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\Big[(h_n^{np})'(1-h_n)+(h_n)'(h_n^{np}-1)\Big]}{-(h_n^{np}-1)\,(h_n^{np}-h_n)}\\
&=-\frac{1}{(h^p-1)^2}\\
&\quad\cdot\lim_{n\to\infty}h_n^{np}\left[p\,\log h_n^n+\frac{n^2p\log h^{-1}}{(n+\log M)(n+\log m)}\right]\frac{n\log h^{-1}}{n+\log m}\\
&\quad-\frac{1}{(h^p-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log h^{-1}(h_n^{np}-1)}{(n+\log m)^2}\\
&=-\frac{1}{(h^p-1)^2}h^p(p\log h-p\log h)\log h^{-1}-\frac{(h^p-1)}{(h^p-1)^2}\log h^{-1}\\
&=\log h^{\frac{1}{h^p-1}}.\end{aligned}$$

利用对任意的 $X>0$ 有 $\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{1}{n}\log X\right)^n=X$, 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} K_+\Big(1+\frac{1}{n}\log m, 1+\frac{1}{n}\log M, np\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} K_1(h_n, np)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{-1}{np}\right)^{np}}{(np-1)(h_n-1)}\left[(h_n^{np}-h_n)\left(\frac{h_n^{np}-1}{h_n^{np}-h_n}\right)^{np}\right]\\
&= \frac{1}{p\,\mathrm{e}\log h}(h^p-1)h^{\frac{p}{h^p-1}}\\
&= M_h(p).
\end{aligned}$$

定理 4.6.3 (Kantorovich 型不等式) 设 $A>0$, $0<m\le B\le M$, 则下列条件成立:

(1) $A\ge B$ 蕴含 $K_+(m,M,p)A^p\ge B^p$, 其中 $p\ge 1$, $K_+(m,M,p)$ 如引理 4.6.3 中所示;

(2) $A\gg B$ 蕴含 $M_h(p)A^p\ge B^p$, 其中 $p>0$, $M_h(p)$ 如引理 4.6.3 中所示;

(3) $A\ge B$ 蕴含 $\dfrac{(M^{p-1}+m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}}A^p\ge B^p$, 其中 $p\ge 2$;

(4) $A\gg B$ 蕴含 $\dfrac{(M^p+m^p)^2}{4m^pM^p}A^p\ge B^p$, 其中 $p\ge 0$.

证 (1) 由定理 2.5.5 可得.

(2) 对充分大的自然数 n, 有

$$I+\frac{1}{n}\log A\ge I+\frac{1}{n}\log B>0,$$
$$I+\frac{1}{n}\log M\ge I+\frac{1}{n}\log B\ge I+\frac{1}{n}\log m.$$

应用 (1) 得, 当 $np\ge 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&K_+\left(1+\frac{1}{n}\log m, 1+\frac{1}{n}\log M, np\right)\left(I+\frac{1}{n}\log A\right)^{np}\\
&\ge \left(I+\frac{1}{n}\log B\right)^{np}.
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 由引理 4.6.3 可得.

(3) 设 $p \geq 2$, 由 Furuta 不等式有

$$A_1 = \left(B^{\frac{p-2}{2}} A^p B^{\frac{p-2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B^{p-1} = B_1.$$

由定理 2.5.5 知

$$K_+(m^{p-1}, M^{p-1}, 2) A_1^2 \geq B_1^2.$$

化简后可得 (3).

(4) 由 (3) 并仿照 (2) 的证明证明之.

4.7 Kantorovich 型不等式应用于算子混序的一个特征

由对数函数的算子单调性，可知 $A \geq B > 0$ 蕴含混序 $A \gg B$. 关于混序一些特征和性质可参见 [8],[27],[93],[45]. 特别地，有下列结果：

定理 4.7.A [8],[27] 对正可逆算子 A 及 B 有下列条件等价：

(1) $\log A \geq \log B$;

(2) 对一切 $p \geq 0$, $\left(B^{\frac{p}{2}} A^p B^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B^p$;

(3) 对一切 $p \geq 0$ 及 $r \geq 0$, $\left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$.

定理 4.7.B (Kantorovich 型不等式) [45] 设 $A > 0$ 及有正数 M, m, 使得 $M \geq B \geq m > 0$. 则下列条件成立且 (2) 可由 (1) 得出：

(1) 对一切 $p \geq 2$, $A \geq B$ 蕴含 $\dfrac{(M^{p-1} + m^{p-1})^2}{4m^{p-1}M^{p-1}} A^p \geq B^p$;

(2) 对一切 $p \geq 0$, $\log A \geq \log B$ 蕴含 $\dfrac{(M^p + m^p)^2}{4m^p M^p} A^p \geq B^p$.

定理 4.7.C [93] 设 A 及 B 是正可逆算子. 则 $A \geq B > 0$ 当且仅当对一切 $p \geq 2$,

$$\left\| B^{p-1} A^{-\frac{p-2}{2}} B^{-\frac{p}{2}} \right\| A^{p-1} \geq B^{p-1}.$$

作为定理 4.7.C 的一个平行结果，我们有

定理 4.7.1 [110]　设 A 及 B 是正可逆算子，对任意固定的 $p_0 > 0$, 下列条件等价：

(1) $A \gg B$;

(2) 对一切 $p > 0$, $\left\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\| A^p \geq B^p$;

(3) 对一切 $p \in (0, p_0)$, $\left\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\| A^p \geq B^p$.

另一方面我们指出定理 4.7.1 中的条件 $p \in (0, p_0)$ 是本质的，因为有下述结果：

定理 4.7.2 [110]　对任意一个固定的 $p_0 > 0$, 存在两个正可逆算子 A, B 使得对一切 $p \geq p_0$ 有

$$\left\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\| A^p \geq B^p,$$

但是 $A \gg B$ 不成立.

为了给出它们的证明需要下列结果 [45],[85]:

定理 4.7.D [45],[85]　设 $X > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{\log X}{n}\right)^n = X.$$

定理 4.7.1 的证明　(1)⇒(2)　设 $\log A \geq \log B$. 令 $p > 0$, 则对充分大的 n, 有

$$I + \frac{\log A}{n} \geq I + \frac{\log B}{n} > 0,$$

且 $np \geq 2$. 令

$$A_1 = I + \frac{\log A}{n}, \quad B_1 = I + \frac{\log B}{n}.$$

则有 $A_1 \geq B_1 > 0$, 且由定理 4.7.C, 对一切 $np \geq 2$ 有

$$\left\|B_1^{n(p-\frac{1}{n})} A_1^{n\frac{-(p-\frac{2}{n})}{2}} B_1^{-\frac{np}{2}}\right\| A_1^{n(p-\frac{1}{n})} \geq B_1^{n(p-\frac{1}{n})}. \tag{4.7.1}$$

再由定理 4.7.D, 可得当 $n \to \infty$ 时有 $A_1^n \to A$ 及 $B_1^n \to B$. 因此在 (4.7.1)

中令 $n \to \infty$, 则有 $\left\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\| A^p \geq B^p$ 对一切 $p > 0$ 成立.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 令 $0 < p < p_0$ 且 $\lambda_p = \left\|B^p A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\|$. 则由 (3) 得 $B^p \leq \lambda_p A^p$. 由 L-H 不等式, 又有 $B^{\frac{p}{2}} \leq \lambda_p^{\frac{1}{2}} A^{\frac{p}{2}}$, 故

$$B^{\frac{3p}{2}} \leq \lambda_p^{\frac{1}{2}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p}{2}}.$$

现设 $0 < m \leq B \leq M$. 故 $0 < m^{\frac{3p}{2}} \leq B^{\frac{3p}{2}} \leq M^{\frac{3p}{2}}$. 应用定理 4.7.B (1), 就有

$$B^{3p} \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p \left(B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{p}{2}}\right)^2.$$

故

$$B^{2p} \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p A^{\frac{p}{2}} B^p A^{\frac{p}{2}}. \tag{4.7.2}$$

由 (4.7.2) 及 $\lambda_p = \left\|B^{-\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}} B^{2p} A^{-\frac{p}{2}} B^{-\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{2}}$, 有

$$\lambda_p^2 \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} \lambda_p.$$

故

$$\lambda_p \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}}.$$

因此

$$B^p \leq \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} A^p. \tag{4.7.3}$$

由 (4.7.3), 有

$$\log B \leq \frac{1}{p} \log \frac{\left(M^{\frac{3p}{2}} + m^{\frac{3p}{2}}\right)^2}{4M^{\frac{3p}{2}} m^{\frac{3p}{2}}} + \log A.$$

令 $p \to 0$, 可得 (1).

为了证明定理 4.7.2, 我们有下列简单的不等式:

引理 4.7.1 设 a,b,d 是三个正数，则

(1) $b \le \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\|$;

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \le (a+b+d)I$.

定理 4.7.2 的证明 假设 $p_0 > 0$. 令

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(2-2^{1-\frac{p_0}{2}})^2}{(7+3\cdot 2^{-p_0})^4}\right]^{\frac{1}{p_0}}\right)$. 注意到

$$A = U^*\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U,$$

其中 $U = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个酉算子，由简单的计算可知

$$B^{-\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}B^{2p}A^{-\frac{p}{2}}B^{-\frac{p}{2}} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{11} = \left(1+2^{2-\frac{p}{2}}\right)^2 2^p + 2^{-p}\varepsilon^{2p}(2-2^{1-\frac{p}{2}})^2,$$

$$c_{12} = \left(2-2^{1-\frac{p}{2}}\right)\left[\frac{2^{\frac{3p}{2}}\left(1+2^{2-\frac{p}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}}\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)}{2^{\frac{p}{2}}}\right],$$

$$c_{21} = \left(2-2^{1-\frac{p}{2}}\right)\left[\frac{2^{\frac{3p}{2}}\left(1+2^{2-\frac{p}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}}\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)}{2^{\frac{p}{2}}}\right],$$

$$c_{22} = 2^{2p}\varepsilon^{-p}\left(2-2^{1-\frac{p}{2}}\right)^2 + \varepsilon^p\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)^2.$$

由引理 4.7.1 (1), 有

$$
\begin{aligned}
&\left\|B^{-\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}B^{2p}A^{-\frac{p}{2}}B^{-\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \frac{1}{5}\left\{\left(2-2^{1-\frac{p}{2}}\right)\left[\frac{2^{\frac{3p}{2}}\left(1+2^{2-\frac{p}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{p}{2}}}+\frac{\varepsilon^{\frac{3p}{2}}\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)}{2^{\frac{p}{2}}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}}2^{\frac{3p}{4}}\left(2-2^{1-\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{5} \geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}}2^{\frac{3p}{4}}\left(2-2^{1-\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{5}.
\end{aligned}
\tag{4.7.4}
$$

另一方面，可计算得

$$
A^{-\frac{p}{2}}B^pA^{-\frac{p}{2}} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= 2^p\left(1+4\cdot 2^{-\frac{p}{2}}\right)^2+4\varepsilon^p\left(1-2^{-\frac{p}{2}}\right)^2, \\
d_{12} &= \left(1-\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\right)\left[2^{p+1}\left(1+\frac{4}{2^{\frac{p}{2}}}\right)+2\varepsilon^p\left(4+\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\right)\right], \\
d_{21} &= \left(1-\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\right)\left[2^{p+1}\left(1+\frac{4}{2^{\frac{p}{2}}}\right)+2\varepsilon^p\left(4+\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\right)\right], \\
d_{22} &= 4\cdot 2^p\left(1-2^{-\frac{p}{2}}\right)^2+\varepsilon^p\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

因此由引理 4.7.1 (2), 又有

$$
\begin{aligned}
A^{-\frac{p}{2}}B^pA^{-\frac{p}{2}} \leq\ & \frac{1}{25}\left\{2^p\left(1+4\cdot 2^{-\frac{p}{2}}\right)^2+4\varepsilon^p\left(1-2^{-\frac{p}{2}}\right)^2\right. \\
& +\left(1-2^{-\frac{p}{2}}\right)\left[2^{p+1}\left(1+4\cdot 2^{-\frac{p}{2}}\right)+2\varepsilon^p\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)\right] \\
& \left.+4\cdot 2^p\left(1-2^{-\frac{p}{2}}\right)^2+\varepsilon^p\left(4+2^{-\frac{p}{2}}\right)^2\right\} \\
=\ & \frac{2^p}{25}\left(7+6\cdot 2^{-\frac{p}{2}}+12\cdot 2^{-p}\right) \\
& +\frac{\varepsilon^p}{25}\left(28-6\cdot 2^{-\frac{p}{2}}+3\cdot 2^{-p}\right) \\
\leq\ & \frac{2^p}{25}\left(35+15\cdot 2^{-p}\right) \leq \frac{2^p}{5}\left(7+3\cdot 2^{-p_0}\right).
\end{aligned}
\tag{4.7.5}
$$

因为 $0<(2\varepsilon)^{\frac{p_0}{4}}<\dfrac{\left(2-2^{1-\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{7+3\cdot 2^{-p_0}}<1$, 故对 $p>p_0$,

$$(2\varepsilon)^{\frac{p}{4}}<\frac{\left(2-2^{1-\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{7+3\cdot 2^{-p_0}}<1. \tag{4.7.6}$$

故由 (4.7.4),(4.7.5) 及 (4.7.6), 有

$$\begin{aligned}\left\|B^{-\frac{p}{2}}A^{-\frac{p}{2}}B^{2p}A^{-\frac{p}{2}}B^{-\frac{p}{2}}\right\|^{\frac{1}{2}} &\geq \frac{\varepsilon^{-\frac{p}{4}}2^{\frac{3p}{4}}\left(2-2^{1-\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{5}\\ &\geq \frac{2^p}{5}(7+3\cdot 2^{-p_0})\\ &\geq A^{-\frac{p}{2}}B^pA^{-\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

为完成定理 4.7.2 的证明, 只要利用定理 4.7.A 证明对充分小的 $\varepsilon>0$ 有 $(AB^2A)^{\frac{1}{2}}\not\leq A^2$. 这又等价于证明

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} B_1 & B_3\\ B_3 & B_2\end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 324+4\varepsilon^2 & -72-12\varepsilon^2\\ -72-12\varepsilon^2 & 16+36\varepsilon^2\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\\ &\not\leq \begin{pmatrix} 17 & -6\\ -6 & 8\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.7.7}$$

令 $A_1=324+4\varepsilon^2$, $A_2=16+36\varepsilon^2$ 及 $A_3=-72-12\varepsilon^2$. 由 [80], 如果令

$$V=\frac{1}{\sqrt{A_1-A_2+2\varepsilon_1}}\begin{pmatrix}\sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1}\\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1}\end{pmatrix},$$

其中

$$2\varepsilon_1=-A_1+A_2+\sqrt{(A_1-A_2)^2+4A_3^2},$$

则

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_3\\ B_3 & B_2\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\sqrt{A_1+\varepsilon_1} & 0\\ 0 & \sqrt{A_2-\varepsilon_1}\end{pmatrix}V.$$

故

$$B_1 = \frac{(A_1 - A_2 + \varepsilon_1)\sqrt{A_1 + \varepsilon_1} + \varepsilon_1\sqrt{A_2 - \varepsilon_1}}{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}. \tag{4.7.8}$$

当 ε 很小时，就有 $2\varepsilon_1 = 32 + \frac{112}{17}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$,

$$\begin{aligned}\sqrt{A_1 + \varepsilon_1} &= \sqrt{340} + o(\varepsilon),\\ A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 &= 340 + o(\varepsilon),\\ \varepsilon_1\sqrt{A_2 - \varepsilon_1} &= o(1).\end{aligned}$$

故由 (4.7.8), 有 $B_1 = \frac{324}{\sqrt{340}} + o(1)$. 又因 $\frac{324}{\sqrt{340}} > 17$, 故 (4.7.7) 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立.

第五章　Furuta不等式应用于若干算子类

5.1　几个算子单调函数

首先，我们证明下述结果，该结果对讨论算子类的包含关系方面具有十分重要的应用.

定理 5.1.1　设 A, B 均为正算子. 对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \le 1$, 若

$$B^{p_0\beta_0} \le \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

$$A^{p_0\alpha_0} \ge \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

则对任意的 $\alpha \ge \alpha_0$, $\beta \ge \beta_0$ 都有

$$B^{p_0\beta} \le \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta}{\alpha+\beta}},$$

$$A^{p_0\alpha} \ge \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha}{\alpha+\beta}},$$

并且对每个固定的 $\alpha \ge \alpha_0$ 和 $q \ge -\alpha$ 及每个固定的 $\beta \ge \beta_0$ 和 $l \ge -\beta$, 函数

$$f_{\alpha,q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha}{\alpha+\beta}} \quad 和 \quad g_{\beta,l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{l+\beta}{\alpha+\beta}}$$

分别关于 β 和 α 在 $\beta \ge \max\{\beta_0, q\}$ 和 $\alpha \ge \max\{\alpha_0, l\}$ 上递降和递增.

为证明这个结果，首先证明下述引理:

引理 5.1.1　设 A, B 均为正算子. 若对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \le 1$ 有

$$B^{p_0\beta_0} \le \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}}, \tag{5.1.1}$$

则对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$B^{p_0\beta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta}{\alpha_0+\beta}}, \tag{5.1.2}$$

且对固定的 $q \geq -\alpha_0$, 函数

$$f_{\alpha_0,q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}$$

在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上递降，对任何 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}. \tag{5.1.3}$$

证 对 (5.1.1) 利用 Furuta 不等式，则对任何 $p_1 \geq 1$ 和 $r_1 \geq 0$ 有

$$\left[B^{\frac{\beta_0 p_0 r_1}{2}} \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0 p_0 p_1}{\alpha_0+\beta_0}} B^{\frac{\beta_0 p_0 r_1}{2}}\right]^{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}} \geq B^{\beta_0 p_0 (1+r_1)}.$$

取 $p_1 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{\beta_0 p_0} \geq 1$, 则对任何 $r_1 \geq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0(1+p_0 r_1)}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0(1+p_0 r_1)}{2}}\right)^{\frac{(1+r_1)p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0(1+p_0 r_1)}} \geq B^{\beta_0 p_0 (1+r_1)}.$$

令 $\beta = \beta_0(1 + p_0 r_1) \geq \beta_0$, 则

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\beta_0 p_0 - \beta_0}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\beta+\beta_0 p_0 - \beta_0}.$$

又因为

$$\beta + \beta_0 p_0 - \beta_0 - \beta p_0 = (\beta - \beta_0)(1 - p_0) \geq 0,$$

则 $\beta + \beta_0 p_0 - \beta_0 \geq \beta p_0$, 故由 L-H 不等式得

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta p_0}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\beta p_0}.$$

特别地，当 $0 < \varepsilon \leq \beta p_0$ 时，亦有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha_0+\beta}} \geq B^{\varepsilon}. \tag{5.1.4}$$

因此对每个 $q \geq -\alpha_0$, $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 及 $0 < \varepsilon \leq \beta p_0$, 由 (5.1.4) 知

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha_0,q}(\beta) &= \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}} \\
&= \left[\left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0+\beta+\varepsilon}{\alpha_0+\beta}}\right]^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&= \left[A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\frac{\beta}{2}}\left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\alpha_0+\beta}}B^{\frac{\beta}{2}}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right]^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&\geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta+\varepsilon}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta+\varepsilon}} \\
&= f_{\alpha_0,q}(\beta+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

故函数 $f_{\alpha_0,q}(\beta)$ 关于 β 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上单调递减. 另外, 当 $q \geq \beta_0$ 时, 有

$$
A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{q}A^{\frac{\alpha_0}{2}} = f_{\alpha_0,q}(q) \geq f_{\alpha_0,q}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{q+\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}
$$

对任何 $\beta \geq q$ 成立. 故当 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 时, 令 $\beta_1 = q$, $\beta_2 = \beta$, 就有

$$
A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_1}A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_2}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}.
$$

类似引理 5.1.1 的证明, 可证下面的引理 5.1.2.

引理 5.1.2 设 A, B 均为正算子. 若对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $0 < p_0 \leq 1$ 有

$$
A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}},
$$

则对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$
A^{p_0\alpha} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha}{\alpha+\beta_0}},
$$

且对固定的 $l \geq -\beta_0$, 函数

$$
g_{\beta,l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{l+\beta_0}{\alpha+\beta_0}}
$$

在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, l\}$ 上递增, 对任何 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 有

$$
\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\alpha_1}{\alpha_2+\beta_0}} \geq B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{\beta_0}{2}}.
$$

下面证明定理 5.1.1.

定理 5.1.1 的证明 首先由引理 5.1.1 中 (5.1.3), 对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0+\beta}}.$$

故由 $\dfrac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0} \in [0,1]$ 及 L-H 不等式可知

$$A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}. \tag{5.1.5}$$

另一方面, 对 $A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}}$ 应用引理 5.1.2, 对任意 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha+\beta_0}} \geq B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}.$$

从而又有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha+\beta_0}} \geq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{p_0\beta_0}. \tag{5.1.6}$$

现对 (5.1.5) 和 (5.1.6) 分别利用引理 5.1.1 和引理 5.1.2 可得对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 有

$$A^{p_0\alpha} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha}{\alpha+\beta}},$$

$$B^{p_0\beta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta}{\alpha+\beta}},$$

并且当 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $q \geq -\alpha$ 时, $f_{\alpha,q}(\beta)$ 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, q\}$ 上递降, 当 $\beta \geq \beta_0$ 和 $l \geq -\beta$ 时, $g_{\beta,l}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{l+\beta}{\alpha+\beta}}$ 在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, l\}$ 上递增.

注 观察定理 5.1.1 及引理 5.1.1 的证明, 当 $0 < \varepsilon \leq \beta + p_0\beta_0 - \beta_0$ 时, (5.1.4) 仍成立, 从而可得如下结论:

命题 5.1.1 设 A, B 均为正算子, 对固定的 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ 和 $1 < p_0 \leq \dfrac{\alpha_0+\beta_0}{\max\{\alpha_0,\beta_0\}}$, 若

$$B^{p_0\beta_0} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

$$A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}},$$

则对任意 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $\beta \geq \beta_0$, 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\beta_0}{\alpha+\beta_0}} \geq B^{p_0\beta_0}$$

及

$$A^{p_0\alpha_0} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{p_0\alpha_0}{\alpha_0+\beta}}.$$

与引理 5.1.1 、引理 5.1.2 相仿，有下列结果：

引理 5.1.3　设 A, B 均为正算子，对固定的 α_0, β_0 满足 $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $-\beta_0 < \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \overline{\delta} < \alpha_0$.

(1) 如果

$$B^{\beta_0+\delta} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}}, \tag{5.1.7}$$

那么对任意的 $\beta \geq \beta_0$ 有

$$B^{\beta+\delta} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha_0+\beta}}, \tag{5.1.8}$$

且对固定的 $\delta' \leq \alpha_0$, 函数

$$f_{\alpha,\delta'}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\delta'}{\alpha_0+\beta}}$$

在 $\beta \geq \max\{\beta_0, -\delta'\}$ 上递降，特别地，当 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 时，有

$$A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_1} A^{\frac{\alpha_0}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_2} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_1+\alpha_0}{\alpha_0+\beta_2}}. \tag{5.1.9}$$

(2) 如果

$$A^{\alpha_0-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}},$$

那么对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$ 有

$$A^{\alpha-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}}{\alpha+\beta_0}},$$

且对固定的 $\delta'' \geq -\beta_0$, 函数

$$g_{\beta_0,\delta''}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta''}{\beta_0+\alpha}}$$

在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \delta''\}$ 上递增，特别地，当 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 时，有

$$B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_1}A^{\frac{\beta_0}{2}} \leq \left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\alpha_1}{\beta_0+\alpha_2}}.$$

利用引理 5.1.3 还可得到与定理 5.1.1 类似的下述结果：

定理 5.1.2 设 A, B 均为正算子， $\alpha_0, \beta_0 > 0$, $-\beta_0 < \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \overline{\delta} < \alpha_0$. 若

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\beta_0+\alpha_0}} \geq B^{\beta_0+\delta}$$

及

$$A^{\alpha_0-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}},$$

则

(1) 对任意的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\beta+\alpha}} \geq B^{\beta+\delta},$$

此外，对每个固定的 $\alpha \geq \alpha_0$, $\delta' \leq \alpha$,

$$f_{\alpha,\delta'}(\beta) = \left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\delta'}{\alpha+\beta}}$$

是 β 在 $\beta \geq \max\{\beta_0, -\delta'\}$ 上的递降函数，并对 $\beta_2 \geq \beta_1 \geq \beta_0$ 有

$$A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta_1}A^{\frac{\alpha}{2}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta_2}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha+\beta_1}{\alpha+\beta_2}};$$

(2) 对任意 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 又有

$$A^{\alpha-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}}{\alpha+\beta}},$$

且对每个固定的 $\beta \geq \beta_0$, $\delta'' \geq -\beta$ 有

$$g_{\beta,\delta''}(\alpha) = \left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta''}{\beta+\alpha}}$$

关于 α 在 $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \delta''\}$ 上递增，特别地，对 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ 有

$$B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha_1}B^{\frac{\beta}{2}} \leq \left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha_2}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\alpha_1}{\beta+\alpha_2}}.$$

注 由上述定理和后面的引理 5.2.4 可得

推论 5.1.1 设 $A\geq 0$, $B\geq 0$, $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$, $-\beta_0<\delta_0\leq\alpha_0$, $-\beta_0\leq\overline{\delta}_0<\alpha_0$. 则下列论断成立:

(1) 若 $0\leq\delta_0\leq\alpha_0$, 则对每个 $\alpha\geq\alpha_0$ 及 $\beta\geq\beta_0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta_0}{\beta_0+\alpha_0}}\geq B^{\beta_0+\delta_0}\Rightarrow\left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta_0}{\beta+\alpha}}\geq B^{\beta+\delta_0},$$

从而对每个 $\alpha\geq\alpha_0$, $\beta\geq\beta_0$ 及 $0\leq\overline{\delta}_0'\leq\alpha$ 有

$$A^{\alpha-\overline{\delta}_0'}\geq\left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}_0'}{\alpha+\beta}}$$

(2) 若 $-\beta_0\leq\overline{\delta}_0\leq 0$, $N(A)\subseteq N(B)$, 则对每个 $\alpha\geq\alpha_0$ 及 $\beta\geq\beta_0$ 有

$$A^{\alpha_0-\overline{\delta}_0}\geq\left(A^{\frac{\alpha_0}{2}}B^{\beta_0}A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}_0}{\alpha_0+\beta_0}}\Rightarrow A^{\alpha-\overline{\delta}_0}\geq\left(A^{\frac{\alpha}{2}}B^{\beta}A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}_0'}{\alpha+\beta}},$$

从而对每个 $\alpha\geq\alpha_0$, $\beta\geq\beta_0$ 及 $-\beta\leq\delta_0'\leq 0$ 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}}A^{\alpha}B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta_0'}{\beta+\alpha}}\geq B^{\beta+\delta_0'}.$$

5.2 $wF(p,r,q)$ 算子类

作为亚正常算子的推广, 1990 年 Aluthge 引入了 p- 亚正常算子, 即若对某个 $p>0$,

$$(T^*T)^p\geq(TT^*)^p,$$

则称 T 是 p-**亚正常的**. 进而对可逆的算子 T, 若有

$$\log(T^*T)\geq\log(TT^*),$$

则称 T 为 **对数-亚正常算子**. 显见当 $0<q\leq p$ 时, 每个 p- 亚正常算子是 q- 亚正常的, 每个可逆 p- 亚正常算子是对数 - 亚正常的. 由于当 $X>0$ 时

$$\lim_{p\to 0^+}\frac{X^p-1}{p}=\log X,$$

故有时把对数 - 亚正常算子看做是 0- 亚正常的. 继 p- 亚正常与对数 - 亚正常之后, 近年被许多作者加以定义一些更广泛的算子类. 定义如下:

定义 1 设 $k>0$. 若

$$(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2,$$

则称 T 是**属于 $A(k)$ 类的算子**, 特别地, $A(1)$ 类的算子 T 简称为 **A 类算子**, 即 $|T^2| \geq |T|^2$.

定义 2 设 $p>0$, $r>0$. 若

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r}{p+r}} \geq |T^*|^{2r},$$

则称 T **属于 $A(p,r)$ 类**.

定义 3 设 $p>0$, $r\geq 0$ 及 $q\geq 1$. 如果

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}, \tag{5.2.1}$$

则称 T **属于 $F(p,r,q)$ 算子类**.

显见, T 是 $A(k)$ 类的算子当且仅当 T 是 $A(k,1)$ 类的算子, T 是 $A(p,r)$ 类算子当且仅当 T 是 $F\left(p,r,\dfrac{p+r}{r}\right)$ 类的算子. 特别地, $F(1,1,2)$ 类算子是 A 类算子.

另一方面, 在 2000 年, Aluthge 利用算子 T 的 **Aluthge 变换**

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$$

来定义一类新的算子, 称为 **w-亚正常的**, 如果 T 满足

$$|\widetilde{T}| \geq |T| \geq |\widetilde{T}^*|,$$

这里 $T=U|T|$ 是 T 的极分解. Ito 又定义了如下的算子类:

定义 4 如果对 $s>0$, $t>0$, T 满足

$$(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t} \tag{5.2.2}$$

及

$$(|T|^s|T^*|^{2t}|T|^s)^{\frac{s}{s+t}} \leq |T|^{2s}, \tag{5.2.3}$$

则称 T **属于 $wA(s,t)$ 类**. $wA(1,1)$ 类简称为 **wA 类**. 在 [67] 中 Ito 证明了 $A(s,t)$ 等价于 $wA(s,t)$.

我们仿照 $wA(s,t)$ 的定义，可定义如下的一类算子，本节结果可参见 [111].

定义 5 对 $p>0$, $r>0$ 及 $q\geq 1$, 如果 T 满足

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} \tag{5.2.4}$$

及

$$(|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{1-\frac{1}{q}} \leq |T|^{2(p+r)\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \tag{5.2.5}$$

则称 T 属于 $wF(p,r,q)$ 类.

令 $\delta=\dfrac{p+r}{q}-r$, 则在定义 5.2.5 中，有 $-r<\delta\leq p$, 并有

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r+\delta}{p+r}} \geq |T^*|^{2(r+\delta)} \tag{5.2.6}$$

及

$$(|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}} \leq |T|^{2(p-\delta)}. \tag{5.2.7}$$

故 T 属于 $wA(p,r)$ 类当且仅当 T 属于 $wF\left(p,r,\dfrac{p+r}{r}\right)$ 类. 为了得到 $wF(p,r,q)$ 算子的特征，先给出下列引理：

引理 5.2.1 设 $A=A^*$, $B=B^*$, $N(X^*)\subseteq N(A)$ 及 $N(X^*)\subseteq N(B)$, 则 $X^*AX=X^*BX$ 蕴含 $A=B$.

证 由 $X^*AX=X^*BX$ 可知，对 $x=Xy+z$, $z\in N(X^*)$, 我们有

$$\begin{aligned}(Ax,x)&=(AXy,Xy+z)=(AXy,Xy)\\&=(BXy,Xy)+(BXy,z)=(Bx,x).\end{aligned}$$

从而对 $H=N(X^*)+\overline{R(X)}$ 中的每个 x, 也有 $(Ax,x)=(Bx,x)$, 故 $A=B$.

引理 5.2.2 设 $A\geq 0$, $s>0$, $E:H\to M$ 为正交投影，$N(E)\subseteq N(A)$, 则

$$A^sE=A^s,\quad EA^s=A^s,\quad EA^sE=A^s.$$

证 由于 E 为投影算子，故 $E(EA^sE)E = EA^sE$. 由于

$$N(E) \subseteq N(A) = N(A^s), \quad N(E) \subseteq N(EA^sE),$$

故由引理 5.2.1 可得 $EA^sE = A^s$. 从而

$$EA^s = E^2A^sE = EA^sE = A^s = A^sE.$$

因此结论成立.

引理 5.2.3 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $A \geq 0$, 则

(1) $U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*U = U^*U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*U = (|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha$;

(2) $UU^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha = (|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha UU^* = UU^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha UU^* = (|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha$;

(3) $(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*)^\alpha = U(|T|^\beta A|T|^\beta)^\alpha U^*$;

(4) $(U^*|T^*|^\beta A|T^*|^\beta U)^\alpha = U^*(|T^*|^\beta A|T^*|^\beta)^\alpha U$,

其中 $T = U|T|$ 是 T 的极分解.

证 由于 $T^* = U^*|T^*|$ 是 T^* 的一个极分解，故只需证 (1), (3) 即可.

(1) 由定理 1.3.1 知 U^*U 是一个正交投影. 再由 $N(U) = N(|T|)$ 知

$$N(U^*U) = N(|T|) \subseteq N(|T|^\beta A|T|^\beta).$$

从而由引理 5.2.2 知 (1) 成立.

(3) 因对任意多项式 g 有

$$g(U|T|^\beta A|T|^\beta U^*) = Ug(|T|^\beta A|T|^\beta)U^*,$$

故 (3) 成立.

定理 5.2.1 下列三条件等价:

(1) $T \in wF(p, r, q)$;

(2) $|\widetilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}}$;

(3) $|T|^{2(p+r)\left(1-\frac{1}{q}\right)} \geq |(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)}$,

其中 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 T 的广义 Aluthge 变换，即 $\widetilde{T}_{p,r} = |T|^pU|T|^r$.

证　由定理 1.3.4 (1), 有 (5.2.5) 等价于 (3). 另一方面, 由 (5.2.4) 知

$$U^*(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}}U \geq U^*|T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}U.$$

再由引理 5.2.3 的 (1) 和 (4) 及 $U^*|T^*|^rU = |T|^r$, 得 (2) 成立. 反之, 由 (2) 又有

$$(|T|^rU^*|T|^{2p}U|T|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}},$$

故

$$U(|T|^rU^*|T|^{2p}U|T|^r)^{\frac{1}{q}}U^* \geq U|T|^{\frac{2(p+r)}{q}}U^*.$$

再由引理 5.2.3 (3) 得 (5.2.4).

类似于定理 5.2.1 的证明可证得下面的定理:

定理 5.2.2　一个算子 T 属于 $wF(p,r,q)$ 当且仅当

$$|(\widetilde{T^*}_{r,p})^*|^{\frac{2}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}$$

及

$$|T^*|^{2(p+r)\left(1-\frac{1}{q}\right)} \geq |\widetilde{T^*}_{r,p}|^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)},$$

其中 $\widetilde{T^*}_{r,p}$ 是 T^* 的广义 Aluthge 变换, 即 $\widetilde{T^*}_{r,p} = |T^*|^rU^*|T^*|^p$.

为说明 $wF\left(p,r,\dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$ 与 $F\left(p,r,\dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$ 在某些条件下的一致性, 先叙述几个引理.

引理 5.2.A　设 $A \geq 0$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to+0} A^{\frac{1}{2}}(A+\varepsilon I)^{-1}A^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} A(A+\varepsilon I)^{-1} = P_{N(A)^{\perp}},$$

其中 P_M 表示到闭子空间 M 上的正交投影.

证　对 $\varepsilon > 0$ 及 $x \in R(A)$, 存在 $y \in H$ 使得 $x = Ay$, 再由 $0 \leq A(A+\varepsilon I)^{-1} \leq I$, 易得

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to+0} A(A+\varepsilon I)^{-1}x\\&\quad= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[(A+\varepsilon I)^{-1}(A+\varepsilon I)\,x - \varepsilon(A+\varepsilon I)^{-1}Ay\right] = x.\end{aligned}$$

从而 $\forall\, x \in \overline{R(A)} = N(A)^{\perp}$, 也有

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A(A+\varepsilon I)^{-1}x = x.$$

进而 $\forall\, x = u + v \in H$, 其中 $u \in N(A)$, $v \in \overline{R(A)}$, 有

$$\lim_{\varepsilon \to +0} A(A+\varepsilon I)^{-1}x = \lim_{\varepsilon \to +0}(A+\varepsilon I)^{-1}Av = v = P_{N(A)^{\perp}}x.$$

利用引理 5.2.A, 可证下述引理:

引理 5.2.4 [67] 设 $A, B \geq 0$, 则对每个 $p, r \geq 0$, 有

(1) $\left(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^{r}$ 蕴含 $\left(A^{\frac{p}{2}}B^{r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+r}} \leq A^{p}$;

(2) $\left(A^{\frac{p}{2}}B^{r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+r}} \leq A^{p}$ 且 $N(A) \subseteq N(B)$ 蕴含 $\left(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^{r}$.

证 (1) 设 $\varepsilon > 0$. 由

$$(B^{r}+\varepsilon I)^{-1} \geq \left(\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|^{\frac{2r}{p+r}} + \varepsilon I\right)^{-1},$$

令 $A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}} = U\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|$ 是 $A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}$ 的极分解, 则有

$$\begin{aligned} & A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}(B^{r}+\varepsilon I)^{-1}B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p}{2}} \\ & \geq U\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|\left(\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|^{\frac{2r}{p+r}} + \varepsilon I\right)^{-1}\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|U^{*}. \end{aligned}$$

应用引理 5.2.A, 可得

$$A^{p} \geq A^{\frac{p}{2}}P_{N(B)^{\perp}}A^{\frac{p}{2}} \geq U\left|A^{\frac{p}{2}}B^{\frac{r}{2}}\right|^{\frac{2p}{p+r}}U^{*} = \left(A^{\frac{p}{2}}B^{r}A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+r}}.$$

(2) 类似 (1) 可证.

由引理 5.2.4 及 L-H 不等式可得

引理 5.2.5 设 $\alpha_0, \beta_0 > 0$, 且 $-\beta_0 \leq \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \overline{\delta} \leq \alpha_0$.

(1) 若 $0 \leq \delta \leq \alpha_0$, 且 $0 \leq \overline{\delta} \leq \alpha_0$, 则

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}}A^{\alpha_0}B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{\beta_0+\delta}$$

蕴含 $A^{\alpha_0-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$.

(2) 若 $-\beta_0 \leq \delta \leq 0$, 且 $-\beta_0 \leq \overline{\delta} \leq 0$, 则

$$A^{\alpha_0-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$$

且 $N(A) \subseteq N(B)$, 可蕴含 $\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{\beta_0+\delta}$.

结合引理 5.2.5 及定理 5.1.2 又有

引理 5.2.6 设 $A, B \geq 0$, $\alpha_0, \beta_0 > 0$ 且 $-\beta_0 \leq \delta \leq \alpha_0$, $-\beta_0 \leq \overline{\delta} \leq \alpha_0$.

(1) 若 $0 \leq \delta \leq \alpha_0$ 及

$$\left(B^{\frac{\beta_0}{2}} A^{\alpha_0} B^{\frac{\beta_0}{2}}\right)^{\frac{\beta_0+\delta}{\alpha_0+\beta_0}} \geq B^{\beta_0+\delta},$$

则对任意 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$, 及 $0 \leq \overline{\delta} \leq \alpha$, 有

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha+\beta}} \geq B^{\beta+\delta}$$

及

$$A^{\alpha-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}}{\alpha+\beta}}.$$

(2) 若 $-\beta_0 \leq \overline{\delta} \leq 0$, 则

$$A^{\alpha_0-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha_0}{2}} B^{\beta_0} A^{\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{\frac{\alpha_0-\overline{\delta}}{\alpha_0+\beta_0}}$$

且 $N(A) \subseteq N(B)$, 可蕴含

$$A^{\alpha-\overline{\delta}} \geq \left(A^{\frac{\alpha}{2}} B^{\beta} A^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{\alpha-\overline{\delta}}{\alpha+\beta}}$$

及

$$\left(B^{\frac{\beta}{2}} A^{\alpha} B^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{\beta+\delta}{\alpha+\beta}} \geq B^{\beta+\delta},$$

其中 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ 且 $-\beta \leq \delta \leq 0$.

定理 5.2.3 设 $p > 0$, $r \geq 0$ 且 $0 \leq \delta \leq p$, $\delta + r \neq 0$, 则 $wF\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$ 类与 $F\left(p, r, \frac{p+r}{\delta+r}\right)$ 一致.

证 由 $T \in F\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$, 有

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{\delta+r}{p+r}} \geq |T^*|^{2(p+r)\frac{\delta+r}{p+r}} = |T^*|^{2(\delta+r)}.$$

由引理 5.2.5 (1), 得

$$|T|^{2(p-\delta)} \geq (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{2(p-\delta)}{2p+2r}} = (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}}.$$

故 $T \in wF\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$.

定理 5.2.4 设 T 是 $wF\left(p_0, r_0, \dfrac{p_0+r_0}{\delta_1+r_0}\right)$ 类算子, 其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$ 及 $-r_0 < \delta_1 \leq p_0$, 则对 $p \geq p_0$ 及 $r \geq r_0$, T 是 $wF\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta_1+r}\right)$ 类算子.

证 (1) 当 $r_0 > 0$ 且 $-r_0 < \delta_1 < p_0$ 时, 由定理 5.1.2 应用于 $B = |T^*|$, $A = |T|$, $\alpha_0 = 2p_0$, $\beta_0 = 2r_0$, $\delta = 2\delta_1$, $\overline{\delta} = 2\delta_1$, $\alpha = 2p$, $\beta = 2r$ 可知.

(2) 当 $r_0 > 0$, $\delta_1 = p_0$ 时, 由引理 5.2.6 可知.

(3) 若 $r_0 = 0$, 则 T 是 δ_1 亚正常的. 故当 $p \geq p_0 \geq \delta_1$ 及 $r \geq 0$ 时有 $T \in F\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta_1+r}\right)$, 这是下面定理 5.2.A 的一个直接结果.

定理 5.2.A [33] (1) 对一个固定的 $k > 0$, T 是 k- 亚正常的当且仅当

$$T \in F(2kp, 2kr, q),$$

其中 $p > 0$, $r \geq 0$, $q \geq 1$ 且 $(1+2r)q \geq 2(p+r)$, 或者等价地对 $p > 0$, $r \geq 0$ 及 $q \geq 1$ 使得 $(k+r)q \geq p+r$, $T \in F(p, r, q)$.

(2) 设 T 是 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子, 其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$ 及 $q_0 \geq 1$, 则 T 是 $F(p_0, r_0, q)$ 类算子, 其中 $q \geq q_0$.

(3) 设 $r_0 \geq 0$, $p_0 > 0$, $-r_0 < \delta_0 \leq p_0$, 且 T 是一个 $F\left(p_0, r_0, \dfrac{p_0+r_0}{\delta_0+r_0}\right)$ 类算子, 则

(a) 当 $r \geq r_0$ 时, T 是 $F\left(p_0, r, \dfrac{p_0+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子;

(b) 当 $p \geq p_0$, $r \geq r_0$, $0 \leq \delta_0 \leq p_0$ 时，T 是 $F\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子.

定理 5.2.A (1) 可由 Furuta 不等式直接得出；(2) 由 L-H 不等式可得；(3) 由引理 5.1.3 和引理 5.2.6 可知.

由定理 5.2.3 及定理 5.2.A (2) 又可得下面的推论：

推论 5.2.1 设 T 是 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子，其中 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$, $r_0 q_0 \leq r_0 + p_0$ 及 $q_0 \geq 1$, 则 T 是 $wF(p_0, r_0, q)$ 类算子，其中 $q \geq q_0$ 且 $r_0 q \leq r_0 + p_0$.

再由定理 5.2.3、定理 5.2.4 及推论 5.2.1 知下列结果成立：

推论 5.2.2 设 $1 \geq p > 0$, $1 \geq r \geq 0$ 及 $0 \leq \delta \leq p$, $\delta + r \neq 0$. 如果 T 是 $wF\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$ 类算子，则 T 是 A 类算子.

证 由定理 5.2.4 及推论 5.2.1 知，T 是 $wF(1,1,2)$ 类算子，故 T 是 $F(1,1,2)$ 类算子，从而是 A 类算子.

最后，由定理 5.2.3、定理 5.2.4 又有

推论 5.2.3 设 $p_0 > 0$, $r_0 \geq 0$, 且 $0 < \delta \leq p_0$. 如果 T 是 $F\left(p_0, r_0, \dfrac{p_0+r_0}{\delta+r_0}\right)$ 类算子，则 T 是 $F\left(p, r, \dfrac{p+r}{\delta+r}\right)$ 类算子，其中 $p \geq p_0$, $r \geq r_0$.

为了考虑 $wF(p, r, q)$ 类算子的幂的性质. 需要下列结果：

定义在集合 I 上的实值函数 $f(x)$, 称为是**算子凸的**，如果对任意谱位于 I 中的自伴算子 A, B 和任意 $\lambda \in [0,1]$ 都有

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$

定理 5.2.B (Jensen 不等式)[62] 设 f 是一个定义在 $[0, \alpha)$ 上的实值连续函数，则下列结果等价：

(1) f 是算子凸函数，且 $f(0) \leq 0$;

(2) $A^* f(X) A \geq f(A^* X A)$, 对一切压缩算子 A 及 $X \geq 0$, 且 $\sigma(X) \subseteq [0, \alpha)$ 成立；

(3) 对一切满足 $A^*A+B^*B\le I$ 的算子 A,B 和一切谱位于 $[0,\alpha)$ 内的算子 X,Y 有

$$f(A^*XA+B^*YB)\le A^*f(X)A+B^*f(Y)B;$$

(4) 对每个投影 P 和每个谱位于 $[0,\alpha)$ 的自伴算子 X 有

$$f(PXP)\le Pf(X)P;$$

(5) $t\to t^{-1}f(t)$ 是 $(0,\alpha)$ 上的算子单调函数;

如果还有 $f\le 0$, 则上面条件当 $\alpha=+\infty$ 时又等价于

(6) $-f$ 是 $[0,\alpha)$ 上的算子单调函数.

证 (1) ⇒ (2) 考虑 $H\oplus H$ 上的算子,

$$X_1=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} A & -B \\ C & A^* \end{pmatrix},$$

其中 $C=(I-A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $B=(I-AA^*)^{\frac{1}{2}}$. 易见, U,V 是酉算子, 故 U^*XU,V^*XV 的谱还在 $[0,\alpha)$ 中, 于是由 $f(0)\le 0$ 得

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} f(A^*XA) & 0 \\ 0 & f(B^*XB) \end{pmatrix}\\
&=f\begin{pmatrix} A^*XA & 0 \\ 0 & B^*XB \end{pmatrix}=f\Big(\frac{1}{2}(U^*X_1U+V^*X_1V)\Big)\\
&\le\frac{1}{2}\Big(U^*f(X_1)U+V^*f(X_1)V\Big)\\
&\le\frac{1}{2}\left[U^*\begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U+V^*\begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V\right]\\
&=\begin{pmatrix} A^*f(X)A & 0 \\ 0 & Bf(X)B \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

比较其对应元素可知 (2) 成立.

(2) ⇒ (3) 令

$$a=\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

则有

$$f(a^*xa) \le a^*f(x)a.$$

比较其对应元素可知 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4) 显见.

(4) $\Rightarrow$ (1) 对任意谱位于 $[0,\alpha)$ 中的自伴算子 X,Y 和任意 $\lambda \in [0,1]$, 令

$$x = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & -(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \\ (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} & \lambda^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$f(PU^*xUP) \le PU^*f(x)UP.$$

比较其对应元素可知 (1) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (5) 对任意谱位于 $(0,\alpha)$ 中的自伴算子 X,Y 且 $X \le Y$, 令 $A = Y^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}$, 则 $\|A\| \le 1$, 故有

$$f(X) = f(A^*YA) \le A^*f(Y)A = X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}f(Y)Y^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $X^{-1}f(X) \le Y^{-1}f(Y)$.

(5) $\Rightarrow$(2) 不妨设 X 可逆, 且 $\|X\| < \alpha$, 取 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|(1+\varepsilon)X\| \le \alpha.$$

对任意投影 P 有 $X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)X^{\frac{1}{2}} \le (1+\varepsilon)X$, 由 (5) 得

$$\begin{aligned} &X^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)^{-1}X^{-\frac{1}{2}}f\Big(X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)X^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &\quad \le (1+\varepsilon)^{-1}X^{-1}f\Big((1+\varepsilon)X\Big). \end{aligned}$$

左右两边分别乘以 $PX(\varepsilon+P)X^{\frac{1}{2}}$ 和 $X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)XP$, 得

$$\begin{aligned} &PX^{\frac{1}{2}}f\Big(X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)X^{\frac{1}{2}}\Big)X^{\frac{1}{2}}(\varepsilon+P)XP \\ &\quad \le PX(\varepsilon+P)(1+\varepsilon)^{-1}f\Big((1+\varepsilon)X\Big)(\varepsilon+P)XP. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得

$$PX^{\frac{1}{2}}\Big[f\Big(X^{\frac{1}{2}}PX^{\frac{1}{2}}\Big)X^{\frac{1}{2}}P\Big]PXP \le PXP\Big(Pf(X)P\Big)PXP.$$

再由 $f\left(X^{\frac{1}{2}}PX^{\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}}P = X^{\frac{1}{2}}Pf(PXP)$, 得

$$PXP(Pf(PXP)P)PXP \leq PXP(Pf(X)P)PXP.$$

由 $N(PXP) \subseteq N(P)$ 及 PXP 自伴，得

$$Pf(PXP)P \leq Pf(X)P.$$

由于 $t^{-1}f(t)$ 是算子单调增加的，故 $f(0) \leq 0$. 令 $g(t) = f(t) - f(0)$, 得

$$\begin{aligned} f(PXP) &= g(PXP) + f(0) \leq g(PXP) + f(0)P \\ &= P(g(PXP) + f(0))P = Pf(PXP)P \\ &\leq Pf(X)P. \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (6) 对任意谱位于 $[0, \alpha)$ 中的自伴算子 X, Y 且 $X \leq Y$, 取 $\lambda \in (0,1)$, 因 $\lambda Y = \lambda X + (1-\lambda)\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}(Y-X)\right]$ 及 $f \leq 0$, 得

$$f(\lambda Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}(Y-X)\right) \leq \lambda f(X).$$

令 $\lambda \to 1$, 则 $f(Y) \leq f(X)$.

(6) $\Rightarrow$ (2) 仍采用 (1) $\Rightarrow$ (2) 中的记号．取充分大的 λ 使得

$$\begin{aligned} U^*\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U &= \begin{pmatrix} A^*XA & A^*XB \\ BXA & BXB \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} A^*XA+\varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = Y, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A^*f(X)A & A^*f(X)B \\ Bf(X)A & Bf(X)B \end{pmatrix} \\ &= U^*\begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U \geq U^*\begin{pmatrix} f(X) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}U \\ &= U^*f(X_1)U = f(U^*X_1U) \geq f(Y). \end{aligned}$$

故 $A^*f(X)A \geq f(A^*XA+\varepsilon)$. 令 $\varepsilon \to 0$ 即可.

定理 5.2.C [19]　设 $A, B \in B(H)$, 则下列条件等价:

(1) $R(A) \subseteq R(B)$;

(2) $AA^* \leq \lambda BB^*$, 对某个 $\lambda \geq 0$;

(3) 存在 $C \in B(H)$, 使 $A = BC$.

此外，如果上述三条件成立，则存在唯一的算子 C 使 $A = BC$,

(a) $\|C\|^2 = \inf\{\mu | AA^* \leq \mu BB^*\}$;

(b) $N(A) = N(C)$;

(c) $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)}$.

证　(I) 由

$$AA^* = BCC^*B^* \leq \|C\|^2 BB^*,$$

有 (3) 蕴含 (1) 和 (2).

(II) (1) $\Rightarrow$ (3)　由 $R(A) \subseteq R(B)$, 故对任意 $f \in H$, 必有唯一 $h \in N(B)^{\perp}$, 使得 $Bh = Af$. 故在 H 上可定义算子 C_1, 使得 $C_1 f = h$, 则有 $A = BC_1$.

下面用闭图像定理证明 C_1 有界.

事实上，若 $f_n \to f$, $C_1 f_n \equiv h_n \to h$, 则

$$Af_n \to Af, \quad Bh_n \to Bh,$$

由于 $Bh_n = Af_n$, 得 $h = C_1 f$.

(III) (2) $\Rightarrow$ (3)　设 $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$, 定义映射 $D: R(B^*) \to R(A^*)$, 使得 $B^*f \to A^*f$. 显见 D 有定义，且

$$\begin{aligned}\|D(B^*f)\|^2 &= \|A^*f\|^2 = (AA^*f, f) \\ &\leq \lambda^2 (BB^*f, f) = \lambda^2 \|B^*f\|^2.\end{aligned}$$

故 D 可有界延拓到 $\overline{R(B^*)}$ 上. 如果在 $R(B^*)^{\perp}$ 上定义 D 为 0, 则 D 在整个 H 上有定义，且 $DB^* = A^*$, 从而 $A = BD^*$. 令 $C_2 = D^*$, 则有 (3) 成立，且 $\|C_2\|^2 \leq \lambda^2$, 再由 (I) 得 (a). 因为

$$N(C_2) = R(D)^{\perp} = R(A^*)^{\perp} = N(A),$$

故 (b) 成立. 最后由 $R(B^*)^{\perp} \subseteq N(D) = R(C_2)^{\perp}$ 得 (c) 成立.

(IV) 唯一性. 若 E 也是满足这些条件的算子，则

$$E^*B^* = A^* = C_2^*B^*,$$

故在 $\overline{R(B^*)}$ 上，$E^* = C_2^*$. 又对 $f \in R(B^*)^\perp \subseteq R(E)^\perp = N(E^*)$, 再由 D 的定义有 $E^*f = 0 = C_2^*f$, 故 $E^* = C_2^*$. 即 $C_2 = E$.

定理 5.2.D [65] 设 $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $1 \leq q$ 且 $rq \leq p + r$, 如果 T 是可逆的 $F(p, r, q)$ 算子，则 T^n 是 $F\left(\frac{p}{n}, \frac{r}{n}, q\right)$ 算子.

证 令 $\delta = \dfrac{p+r}{q} - r$, 则 $0 \leq \delta \leq p$. 故由推论 5.2.3 知，$T \in F\left(1, 1, \dfrac{2}{1+\delta}\right) \subseteq F(1, 1, 2)$, 即 T 是 A 类算子. 故由下面定理 5.2.F 得

$$|T^n|^{\frac{2}{n}} \geq \cdots \geq |T^2| \geq |T|^2, \tag{5.2.8}$$

且

$$|T^*|^2 \geq |(T^2)^*| \geq \cdots \geq |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}. \tag{5.2.9}$$

由 $T \in F(p, r, q)$, 知

$$(|T^*|^r |T|^{2p} |T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}.$$

故

$$|T|^p (|T|^p |T^*|^{2r} |T|^p)^{\frac{1}{q}-1} |T|^p \geq |T^*|^{2\left(\frac{p+r}{q} - r\right)}.$$

再由 (5.2.9) 和 L-H 不等式，得

$$|T|^p \left(|T|^p |T^{n*}|^{\frac{2r}{n}} |T|^p\right)^{\frac{1}{q}-1} |T|^p \geq |T^*|^{2\left(\frac{p+r}{q} - r\right)} \geq |T^{n*}|^{\frac{2}{n}\left(\frac{p+r}{q} - r\right)}.$$

将上式两边乘以 $|T^{n*}|^{\frac{r}{n}}$, 可得

$$\left(|T^{n*}|^{\frac{r}{n}} |T|^{2p} |T^{n*}|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq |T^{n*}|^{\frac{2(p+r)}{nq}}.$$

再由 (5.2.8) 可知结论成立.

定理 5.2.E [97] 设 T 是 ωA 算子，则

$$|T^n|^{\frac{2}{n}} \geq \cdots \geq |T^2| \geq |T|^2,$$

且

$$|T^*|^2 \geq |(T^2)^*| \geq \cdots \geq |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}.$$

证　令 $A_n = |T^n|^{\frac{2}{n}}$，$B_n = |T^{n*}|^{\frac{2}{n}}$. 则

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_1 B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B_1$$

及

$$A_1 \geq \left(A_1^{\frac{1}{2}} B_1 A_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面用归纳法证明

$$A_{n+1}^n = |T^{n+1}|^{\frac{2n}{n+1}} \geq |T^n|^2 = A_n^n \tag{5.2.10}$$

及

$$B_n^n = |T^{n*}|^2 \geq |(T^{n+1})^*|^{\frac{2n}{n+1}} = B_{n+1}^n. \tag{5.2.11}$$

当 $n=1$ 时显然成立. 假设对 $n \leq k-1$ 时结论成立，则有

$$A_k \geq A_{k-1} \geq \cdots \geq A_2 \geq A_1.$$

可验证下列条件成立：

(*) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^{\frac{1}{2}} x_n = 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} A_k^{\frac{1}{2}} x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_k^{\frac{1}{2}} x_n = 0$.

从而由下面的引理 5.2.7 知

$$A_k \geq \left(A_k^{\frac{1}{2}} B_1 A_k^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 5.1.2 知

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_k^k B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{k}{k+1}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_k^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}}.$$

再由归纳假设，得

$$\left(B_1^{\frac{1}{2}} A_k^k B_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{k}{k+1}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_k^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}} \geq B_1^{\frac{1}{2}} A_{k-1}^{k-1} B_1^{\frac{1}{2}},$$

即

$$(|T^*||T^k|^2|T^*|)^{\frac{k}{k+1}} \geq |T^*||T^{k-1}|^2|T^*|.$$

于是

$$
\begin{aligned}
|T^{k+1}|^{\frac{2k}{k+1}} &= U^*(|T^*||T^k|^2|T^*|)^{\frac{k}{k+1}}U \\
&\geq U^*|T^*||T^{k-1}|^2|T^*|U = |T^k|^2.
\end{aligned}
$$

于是 (5.2.10) 对 $n=k$ 成立. 类似地可证另外一个不等式.

定理 5.2.F [32],[66],[94],[95] T 是一个可逆算子, 则 T 是对数 - 亚正常当且仅当对一切 $p>0$ 及 $r>0$, T 是 $A(p,r)$ 类算子.

引理 5.2.G [97] 设 A,B,C 是定理 5.2.C 中所述的算子, 则下列两个条件等价:

(1) $\overline{R(C)}=\overline{R(B^*)}$;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}A^*x_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}B^*x_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}B^*x_n=0$ 对 H 中任意向量列 $\{x_n\}$ 成立.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}B^*x_n=y$, 则 $y\in\overline{R(B^*)}=\overline{R(C)}$. 另一方面, 由 $0=\lim\limits_{n\to\infty}A^*x_n=C^*y$, 知 $y\in N(C^*)$. 故 $y=0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 只需证明 $N(C^*)\subseteq N(B)$. 任给 $y\in N(C^*)$, 令

$$
y=y_1+y_2,\quad y_1\in N(B),\ y_2\in N(B)^{\perp}=\overline{R(B^*)},
$$

则存在 $x_n\in H$ 使得 $B^*x_n\to y_2$. 于是

$$
A^*x_n=C^*B^*x_n\to C^*y_2=0.
$$

故 $y_2=\lim\limits_{n\to\infty}B^*x_n=0$. 从而结论成立.

引理 5.2.H [67] 设 $A=A^*$, $B=B^*$, $N(X^*)\subseteq N(A)$, 且 $N(X^*)\subset N(B)$, 则 $X^*AX\geq X^*BX$ 可蕴含 $A\geq B$.

引理 5.2.7 设 $A,B\geq 0$, $0<p\leq 1$, $0<r\leq 1$, $\dfrac{p+r}{r}\geq q\geq 1$. 则下列说法成立:

(1) 若 $\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\geq B^{\frac{p+r}{q}}$, 且 $B\geq C\geq 0$, 则

$$
\left(C^{\frac{r}{2}}A^pC^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\geq C^{\frac{p+r}{q}}.
$$

(2) 若 $B^{\frac{p+r}{q}}\geq\left(B^{\frac{r}{2}}C^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$, 且 $A\geq B$ 及下面条件 (*) 成立:

(*) 若 $\lim_{n\to\infty} B^{\frac{1}{2}}x_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} A^{\frac{1}{2}}x_n$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty} A^{\frac{1}{2}}x_n = 0$，其中 $\{x_n\}$ 是任意向量列，

则 $A^{\frac{p+r}{q}} \geq \left(A^{\frac{r}{2}}C^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}$.

证 (1) 由 L-H 不等式知 $B^r \geq C^r$. 故由定理 5.2.C, 存在压缩算子 X 使得

$$C^{\frac{r}{2}} = B^{\frac{r}{2}}X = X^*B^{\frac{r}{2}}.$$

故由 Jensen 不等式和 $\frac{p+r}{q} - r \in [0,1]$ 知

$$\begin{aligned}\left(C^{\frac{r}{2}}A^pC^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(X^*B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}X\right)^{\frac{1}{q}} \geq X^*\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}X \\ &\geq X^*B^{\frac{p+r}{q}}X \geq X^*\left(B^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p+r}{q}-r}B^{\frac{r}{2}}\right)X \\ &\geq C^{\frac{r}{2}}C^{\frac{p+r}{q}-r}C^{\frac{r}{2}} = C^{\frac{p+r}{q}}.\end{aligned}$$

(2) 由 L-H 不等式知 $A^r \geq B^r$. 故由定理 5.2.C, 存在压缩算子 X 使得

$$B^{\frac{r}{2}} = A^{\frac{r}{2}}X = X^*A^{\frac{r}{2}}.$$

故由 $\frac{p+r}{q} - r \in [0,1]$ 知

$$\begin{aligned}X^*\left(A^{\frac{r}{2}}C^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}X &\leq \left(X^*A^{\frac{r}{2}}C^pA^{\frac{r}{2}}X\right)^{\frac{1}{q}} = \left(B^{\frac{r}{2}}C^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq B^{\frac{p+r}{q}} = B^{\frac{r}{2}}B^{\frac{p+r}{q}-r}B^{\frac{r}{2}} \\ &\leq B^{\frac{r}{2}}A^{\frac{p+r}{q}-r}B^{\frac{r}{2}} \\ &= X^*A^{\frac{p+r}{q}}X.\end{aligned}$$

下面我们来验证下列条件成立：

若 $\{x_n\} \subseteq H$ 使 $\lim_{n\to\infty} B^{\frac{r}{2}}x_n = 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n = 0.$$

事实上，由 $\lim\limits_{n\to\infty} B^{\frac{r}{2}}x_n = 0$ 知， $\lim\limits_{n\to\infty} B^{\frac{1}{2}}x_n = 0$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n$ 存在蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{1}{2}}x_n$ 存在. 故由条件 (*) 知， $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{1}{2}}x_n = 0$. 进而

$$\lim_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n \in \overline{R\left(A^{\frac{r}{2}}\right)} = \overline{R(A)},$$
$$\lim_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n \in N\left(A^{\frac{1-r}{2}}\right) = N(A).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n \in N(A)\cap\overline{R(A)} = \{0\}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\frac{r}{2}}x_n = 0$. 由引理 5.2.G 可知 $\overline{R\left(A^{\frac{r}{2}}\right)} = \overline{R(X)}$, 故

$$N(X^*) \subseteq N\left(A^{\frac{r}{2}}\right), \quad N(X^*) \subseteq N\left((A^{\frac{r}{2}}C^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}\right).$$

由引理 5.2.H 可知结论成立.

定理 5.2.5 设 $0 < p \le 1$, $0 \le r \le 1$, 且当 $r = 0$ 时， $q \ge 1$, 当 $r > 0$ 时，取 q 使 $\dfrac{p+r}{r} \ge q \ge 1$, 则当 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子时， T^n 是 $wF\left(\dfrac{p}{n},\dfrac{r}{n},q\right)$ 类算子.

证 令 $\delta = \dfrac{p+r}{q} - r$, 则 $0 \le \delta \le p$, 且

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r+\delta}{p+r}} \ge |T^*|^{2(r+\delta)}$$

及

$$|T|^{2(p-\delta)} \ge (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{p-\delta}{p+r}}.$$

由推论 5.2.2 知， T 是 A 类算子 (即 wA 类), 令 $A_n = |T^n|^{\frac{2}{n}}$, $B_n = |(T^n)^*|^{\frac{2}{n}}$, 由定理 5.2.E 知

$$A_n \ge \cdots \ge A_2 \ge A_1, \quad B_1 \ge B_2 \ge \cdots \ge B_n.$$

如果 $r = 0$, 由 $|T|^{\frac{2p}{q}} \ge |T^*|^{\frac{2p}{q}}$ (因 $T \in wF(p,0,q)$), 故

$$A_n^{\frac{p}{q}} \ge A_1^{\frac{p}{q}} \ge B_1^{\frac{p}{q}} \ge B_n^{\frac{p}{q}},$$

因此 T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n},0,q\right)$ 算子.

如果 $1 \geq r > 0$, 由 L-H 不等式及引理 5.2.7 有

$$\left(B_n^{\frac{r}{2}} A_n^p B_n^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(B_n^{\frac{r}{2}} A_1^p B_n^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq B_n^{\frac{p+r}{q}},$$

即

$$\left(|(T^n)^*|^{\frac{r}{n}} |T^n|^{\frac{2p}{n}} |(T^n)^*|^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq |(T^n)^*|^{\frac{2(p+r)}{nq}}.$$

再由引理 5.2.5 知

$$|T^n|^{\frac{2(p+r)}{n}(1-\frac{1}{q})} \geq \left(|T^n|^{\frac{p}{n}} |(T^n)^*|^{\frac{2r}{n}} |T^n|^{\frac{p}{n}}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

故 T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n},\frac{r}{n},q\right)$ 类算子.

利用定理 5.2.5 可知有下列推论:

推论 5.2.4 设 p,r,q 如定理 5.2.5 所述, 且 T 是 $F(p,r,q)$ 算子时, 则 T^n 是 $F\left(\frac{p}{n},\frac{r}{n},q\right)$ 类算子.

由定理 5.2.D 知

推论 5.2.5 设 $0<p\leq 1$, $0\leq r\leq 1$, $q\geq 1$, 且 $rq\leq p+r$, 则当 T 是可逆的 $wF(p,r,q)$ 算子时, T^n 是 $wF\left(\frac{p}{n},\frac{r}{n},q\right)$ 类算子.

特别地, 可得一个 p $(0<p\leq 1)$- 亚正常算子 T 的 n 次幂 T^n 是 $\frac{p}{n}$- 亚正常算子, 一个对数亚正常算子 T 的 n 次幂仍是对数 - 亚正常算子.

最后, 我们来讨论一下一个 $wF(p,r,q)$ 类算子何时为正常算子.

首先给出几个引理.

引理 5.2.8 [67] 设 $A,B\geq 0$, 且 $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\geq B^2$, $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\geq A^2$. 则 $A=B$.

证 令 $E=P_{\overline{R(A)}}$, $F=P_{\overline{R(B)}}$, 于是有

$$B^{\frac{1}{2}}FAFB^{\frac{1}{2}} \geq B^2.$$

因为 $N(B) = N\left(B^{\frac{1}{2}}\right) \subseteq N(FAF)$, 由引理 5.2.H 得

$$\left(A^{\frac{1}{2}}FA^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A^{\frac{1}{2}}FAFA^{\frac{1}{2}} \geq A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geq A^2.$$

故

$$A^{\frac{1}{2}}EFEA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}FA^{\frac{1}{2}} \geq A = A^{\frac{1}{2}}EA^{\frac{1}{2}}.$$

再由引理 5.2.H 得 $EFE \geq E$, 从而 $EFE = E$, 即 $E(I-F)E = 0$, 这又蕴含 $E(I-F)^{\frac{1}{2}} = 0$, 因此

$$E = EF = FE = (FEF)^{\frac{1}{2}} \leq F,$$

故 $A \geq B$; 又由对称性可知 $B \geq A$.

引理 5.2.9 设 $A, B \geq 0$, $p_i, r_i > 0$, $-r_i < \delta_i \leq p_i$, $-r_i \leq \overline{\delta}_i < p_i$, $i = 1, 2$. 则下列条件等价:

(1) $A = B$;

(2) $B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}} = B^{p_1+r_1}$ 及 $A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}} = B^{p_2+r_2}$;

(3) $\left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1+\delta_1}$, $A^{p_1-\overline{\delta}_1} \geq \left(A^{\frac{p_1}{2}}B^{r_1}A^{\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{p_1-\overline{\delta}_1}{p_2+r_2}}$,

$\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq A^{r_2+\delta_2}$, $B^{p_2-\overline{\delta}_2} \geq \left(B^{\frac{r_2}{2}}A^{p_2}B^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{p_2-\overline{\delta}_2}{p_2+r_2}}$.

特别地, 当 $0 \leq \delta_i \leq p_i$, $i = 1, 2$ 时, (1)~(3) 又等价于

(4) $\left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq B^{r_1+\delta_1}$, $\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq A^{r_2+\delta_2}$.

证 (2) $\Rightarrow$ (1) 取 $s > \max\{p_1, p_2, r_1, r_2\}$, 则由 (2) 可知

$$\left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{p_1+r_1}{p_1+r_1}} = B^{r_1+p_1},$$

$$\left(A^{\frac{r_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{r_2}{2}}\right)^{\frac{p_2+r_2}{p_2+r_2}} = A^{r_2+p_2}.$$

应用引理 5.2.6 得

$$\left(B^{\frac{s}{2}}A^{s}B^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+p_1}{2s}} \geq B^{s+p_1}, \quad A^{s-p_1} \geq \left(A^{\frac{s}{2}}B^{s}A^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_1}{2s}},$$

以及

$$\left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+p_2}{2s}} \geq A^{s+p_2}, \quad B^{s-p_2} \geq \left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_2}{2s}}.$$

故

$$A^{s-p_1} = \left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_1}{2s}}, \quad B^{s-p_2} = \left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-p_2}{2s}}.$$

再由引理 5.2.8 可知 $A=B$.

(3) $\Rightarrow$ (1)　设 $s > \max\{p_1, p_2, r_1, r_2\}$. 则由 (3) 及定理 5.1.2 可知

$$\left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2s}} \geq B^{s+\delta_1}, \quad A^{s-\overline{\delta}_1} \geq \left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\overline{\delta}_1}{2s}},$$

$$\left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s+\delta_2}{2s}} \geq A^{s+\delta_2}, \quad B^{s-\overline{\delta}_2} \geq \left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\overline{\delta}_2}{2s}}.$$

于是

$$A^{s-\overline{\delta}_1} = \left(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\overline{\delta}_1}{2s}}, \quad B^{s-\overline{\delta}_2} = \left(B^{\frac{s}{2}}A^sB^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{s-\overline{\delta}_2}{2s}}.$$

故再由引理 5.2.8 可知 $A=B$.

(4) $\Rightarrow$ (1)　由引理 5.2.5 及 (3) $\Rightarrow$ (1) 可得证.

利用引理 5.2.9 可得

定理 5.2.6　设 $p_i, r_i > 0$ 及 $q_i \geq 1$, $i=1,2$. 若 T 是 $\omega F(p_1, r_1, q_1)$ 类算子，T^* 是 $\omega F(p_2, r_2, q_2)$ 类算子，则 T 正规.

证　令 $\delta_1 = \dfrac{p_1+r_1}{q_1} - r_1$, $\delta_2 = \dfrac{p_2+r_2}{q_2} - r_2$, 则 $-r_i < \delta_i \leq p_i$,

$$(|T^*|^{r_1}|T|^{2p_1}|T^*|^{r_1})^{\frac{r_1+\delta_1}{p_1+r_1}} \geq |T^*|^{2(r_1+\delta_1)},$$

$$|T|^{2(p_1-\delta_1)} \geq (|T|^{p_1}|T^*|^{2r_1}|T|^{p_1})^{\frac{p_1-\delta_1}{p_1+r_1}},$$

以及

$$(|T|^{r_2}|T^*|^{2p_2}|T|^{r_2})^{\frac{r_2+\delta_2}{p_2+r_2}} \geq |T|^{2(r_2+\delta_2)},$$

$$|T^*|^{2(p_2-\delta_2)} \geq (|T^*|^{p_2}|T|^{2r_2}|T^*|^{p_2})^{\frac{p_2-\delta_2}{p_2+r_2}}.$$

由引理 5.2.9 (3)$\Rightarrow$(1) 知 $|T|^2 = |T^*|^2$，故 T 正规.

另一方面， $wF(p,r,q)$ 算子与其 Aluthge 变换的 p- 亚正常算子类之间有下列关系：

定理 5.2.7 设 $p,r>0$, $q\geq 1$. 如果 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，则 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 $\min\left\{\frac{1}{q},\max\left\{\frac{p}{p+r},1-\frac{1}{q}\right\}\right\}$- 亚正常的. 特别地，当 $1\leq q\leq \frac{p+r}{r}$ 时， $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 $\min\left\{\frac{p}{p+r},\frac{1}{q}\right\}$- 亚正常的.

证 首先设 $1\leq q\leq \frac{p+r}{r}$, 则 $0\leq 1-\frac{1}{q}\leq \frac{p}{p+r}$, 令 $\delta=\frac{p+r}{q}-r$, 则 $0\leq\delta\leq p$, 故 $T\in wF(p,r,q)$, 可以推出

$$T\in F(p,r,q)=F\Big(p,r,\frac{p+r}{\delta+r}\Big)\subseteq F\Big(p,r,\frac{p+r}{r}\Big).$$

从而

$$(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{r}{p+r}}\geq |T^*|^{2r}.$$

由引理 5.2.4 得 $|T|^{2p}\geq(|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{\frac{p}{p+r}}$, 即

$$|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{\frac{2p}{p+r}}\leq |T|^{2p}.$$

又由定理 5.2.1 知

$$|T|^{\frac{2p+2r}{q}}\leq|\widetilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}}.$$

令 $m=\min\left\{\frac{p}{p+r},\frac{1}{q}\right\}$, 则

$$|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2m}\leq |T|^{2m(p+r)}\leq|\widetilde{T}_{p,r}|^{2m}.$$

故 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 m- 亚正常的.

设 $1\leq\frac{p+r}{r}\leq q$, 则 $1-\frac{1}{q}\geq\frac{p}{p+r}$, $\max\left\{\frac{p}{p+r},1-\frac{1}{q}\right\}=1-\frac{1}{q}$, 令 $m'=\min\left\{1-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right\}$, 则由定理 5.2.1 知

$$|\widetilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}}\geq|T|^{\frac{2p+2r}{q}},\quad |T|^{2(p+r)\left(1-\frac{1}{q}\right)}\geq|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

则

$$|\widetilde{T}_{p,r}|^{2m'} \geq |T|^{2m'(p+r)} \geq |(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2m'}.$$

故 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 m'- 亚正常的.

定理 5.2.8　设 $p,r>0$, $q\geq 1$, $s\geq p$, $t\geq r$. 如果 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子, $\widetilde{T}_{s,t}$ 正常, 则 T 正常.

证　首先由假设, 令 $\delta = \dfrac{p+r}{q} - r$, 则 $T\in wF\Big(p,r,\dfrac{p+r}{\delta+r}\Big)$, 由 $s\geq p$, $t\geq r$, 应用定理 5.2.4 知 $T\in wF\Big(s,t,\dfrac{s+t}{\delta+t}\Big)$, 从而由定理 5.2.7 得

$$\begin{aligned}|\widetilde{T}_{s,t}|^{\frac{2\min\{t+\delta,\,\max\{s-\delta,s\}\}}{t+s}} &\geq |T|^{2\min\{t+\delta,\,\max\{s-\delta,s\}\}}\\ &\geq |(\widetilde{T}_{s,t})^*|^{\frac{2\min\{t+\delta,\,\max\{s-\delta,s\}\}}{t+s}}.\end{aligned}$$

另一方面, 由 $\widetilde{T}_{s,t}$ 正规, 即 $|\widetilde{T}_{s,t}|^2 = |(\widetilde{T}_{s,t})^*|^2$, 故

$$|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t = |T^*|^{2(s+t)},$$

且

$$|T|^{2(s+t)} = |T|^s|T^*|^{2t}|T|^s.$$

故由引理 5.2.9 知 T 是正规的.

利用上述结果下列推论是显然的.

推论 5.2.6　设 $p_i,r_i>0$, $q_i\geq 1$, $q_i\leq \dfrac{p_i+r_i}{r_i}$, $i=1,2$. 如果 T 是 $F(p_1,r_1,q_1)$ 类算子, T^* 是 $F(p_2,r_2,q_2)$ 类算子, 则 T 正规.

推论 5.2.7　设 $p,r>0$, $1\leq q\leq \dfrac{p+r}{r}$. 如果 T 是 $F(p,r,q)$ 类算子, 则 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 $\min\left\{\dfrac{p}{p+r},\dfrac{1}{q}\right\}$- 亚正常的.

推论 5.2.8　设 $p,r>0$, $1\leq q\leq \dfrac{p+r}{r}$, $s\geq p$, $t\geq r$. 如果 T 是 $F(p,r,q)$ 类算子, 且 $\widetilde{T}_{s,t}$ 是正常的, 则 T 正常.

推论 5.2.9 如果 T 是对数 - 亚正常的，则 $\widetilde{T}_{s,t}$ 是 $\min\left\{\frac{t}{s+t},\frac{s}{s+t}\right\}$-亚正常的.

证明推论 5.2.9 要用到如下结果：

定理 5.2.I [94],[95] 若对某个 $R>0$, T 是 R- 亚正常的，或 T 是对数 - 亚正常的，则对任意 $p>0$, $r>0$, 有 $T\in A(p,r)$ (或 $wA(p,r)$).

5.3 $F(p,r,q),wF(p,r,q)$ 算子类与其中参数的依赖性

下面说明 $F(p,r,q),wF(p,r,q)$ 算子类与其中参数的依赖性. 首先回忆一些已有的结论.

定理 5.3.A [65] 设 $p_0>0$, $r_0\geq 0$, $q_0\geq 1$, T 为一个 $F(p_0,r_0,q_0)$ 类算子. 则下列结论成立：

(1) 若 $r\geq r_0$, 则 T 为一个 $F(p_0,r,q_0)$ 类算子；

(2) 若 $q\geq q_0$, 则 T 为一个 $F(p_0,r_0,q)$ 类算子.

定理 5.3.A (1) 可由引理 5.1.3 和 L-H 不等式得证.

定理 5.3.B 设 $p\geq p_0>0$, $r\geq r_0\geq 0$ 及 $-r_0<\delta_0\leq p_0$. 若 T 为一个 $F\left(p_0,r_0,\frac{p_0+r_0}{\delta_0+r_0}\right)$ 类算子，则下列结论成立：

(1) T 为一个 $F\left(p_0,r,\frac{p_0+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子；

(2) 当 $0\leq\delta_0\leq p_0$ 时，T 为一个 $F\left(p,r,\frac{p+r}{\delta_0+r}\right)$ 类算子.

定理 5.3.B 为定理 5.2.A 、推论 5.2.3 的直接结果.

由于 $q_0\geq\frac{p_0+r}{\delta_0+r}$ ($r\geq r_0$ 时), 故由定理 5.3.B (1) 、定理 5.3.A (2) 及 Löwner-Heinz 不等式可推出定理 5.3.A (1), 即定理 5.3.B (1) 是定理 5.3.A (1) 的推广.

同时，也有 $\frac{p+r_0}{\delta_0+r_0} \geq q_0$ ($p \geq p_0$ 时). 我们试图类似定理 5.3.A (1) 推广到定理 5.3.B (1) 来推广 $r=r_0$ 时的定理 5.3.B (2) 是否有关于 p 的单调性. 这里给出下列与定理 5.3.B (2) 相关的结论.

定理 5.3.1 设 $p_0>0$, $r_0>0$, $q_0>1$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0-r_0, \quad p>(1+r_0)q_0-r_0,$$

则存在一个 $F(p_0,r_0,q_0)$ 类算子 T, 但 T 不是一个 $F(p,r_0,q_0)$ 类算子.

推论 5.3.1 设 $p_0>0$, $r_0>0$, $q_0>1$ 且 $r_0q_0 \leq p_0+r_0$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0-r_0, \quad p>(1+r_0)q_0-r_0,$$

则存在一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子 T, 但 T 不是一个 $wF(p,r_0,q_0)$ 类算子.

定理 5.3.1 表明当 $r=r_0$ 时定理 5.3.B (2) 不能被推广为：

设 $p \geq p_0>0$, $r_0 \geq 0$, $q_0 \geq 1$ 且 $r_0q_0 \leq p_0+r_0$ (等价于 $0 \leq \delta_0 \leq p_0$). 若 T 为一个 $F(p_0,r_0,q_0)$ 类算子，则 T 为一个 $F(p,r_0,q_0)$ 类算子.

我们准备下面的结论以给出证明.

定理 5.3.C [81],[50],[96] 设 $\delta>0$, $p>0$, $r>0$ 且 $q>0$. 若 $0<q<1$ 或 $(\delta+r)q<p+r$, 则下列结论成立：

(1) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B 满足

$$A^\delta \geq B^\delta \text{ 且 } \left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \not\geq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B 满足

$$A^\delta \geq B^\delta \text{ 且 } A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq \left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 5.3.D 设 $p>0$, $r \geq 0$ 且 $q \geq 1$, 则下列结论成立：

(1) 下述 (i)~(iii) 等价：

(i) 算子 T 满足 $(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^{\frac{1}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}$;

(ii) 算子 T 满足 $|\widetilde{T}_{p,r}|^{\frac{2}{q}} \geq |T|^{\frac{2(p+r)}{q}}$;

(iii) 算子 T 满足 $|(\widetilde{T^*}_{r,p})^*|^{\frac{2}{q}} \geq |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}$.

(2) 下述 (i)~(iii) 等价:

(i) 算子 T 满足 $|T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^{1-\frac{1}{q}}$;

(ii) 算子 T 满足 $|T|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2(1-\frac{1}{q})}$;

(iii) 算子 T 满足 $|T^*|^{2(p+r)(1-\frac{1}{q})} \geq |(\widetilde{T^*}_{r,p})|^{2(1-\frac{1}{q})}$.

定理 5.3.D 由引理 1.3.4 中可得.

引理 5.3.1 设 $p_0 > 0$, $r_0 > 0$ 且 $q_0 > 1$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0 - r_0, \quad p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则下列结论成立:

(1) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A, B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p_0}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \text{ 及 } \left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\geq B^{\frac{p+r_0}{q_0}}.$$

(2) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A, B 满足

$$A^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \geq \left(A^{\frac{r_0}{2}}B^{p_0}A^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \text{ 及 } A^{\frac{p+r_0}{q_0}} \not\geq \left(A^{\frac{r_0}{2}}B^{p}A^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

引理 5.3.1 可由定理 5.3.C (取 $\delta = 1$) 与定理 F 直接得出.

引理 5.3.2 设 A 与 B 为 H 上的正算子, 于 $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong H$) 上定义 T 如下:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & \\ & B^{\frac{1}{2}} & 0 & & & & \\ & & B^{\frac{1}{2}} & (0) & & & \\ & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & & \\ & & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.3.1}$$

其中 ( ) 指矩阵元素 (0,0) 的位置. 则下列结论对每个 $p>0$, $r>0$ 及 $\beta>0$ 成立:

(1) $(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^\beta \geq |T^*|^{2(p+r)\beta}$ 当且仅当

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^\beta \geq B^{(p+r)\beta};$$

(2) $|T|^{2(p+r)\beta} \geq (|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^\beta$ 当且仅当

$$A^{(p+r)\beta} \geq \left(A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}}\right)^\beta.$$

证 简单计算易得

$$|T|^2 = T^*T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (A) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$|T^*|^2 = TT^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & (B) & & \\ & & & & A & \\ & & & & & A \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

因此有

$$|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B^{p+r} & & & & \\ & & B^{p+r} & & & \\ & & & (B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}) & & \\ & & & & A^{p+r} & \\ & & & & & A^{p+r} \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & B^{p+r} & & & & & \\ & & B^{p+r} & & & & \\ & & & (A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}}) & & & \\ & & & & A^{p+r} & & \\ & & & & & A^{p+r} & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

故比较两个矩阵 $(|T^*|^r|T|^{2p}|T^*|^r)^\beta$ 及 $|T^*|^{2(p+r)\beta}$ 相应的 (0,0) 元素得证 (1). 类似地，比较两个矩阵 $|T|^{2(p+r)\beta}$ 及 $(|T|^p|T^*|^{2r}|T|^p)^\beta$ 相应的 (0,0) 元素得证 (2).

定理 5.3.1 的证明 由引理 5.3.1 (1), 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A, B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p_0}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \geq B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}} \tag{5.3.2}$$

及

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \ngeq B^{\frac{p+r_0}{q_0}}. \tag{5.3.3}$$

于 $\bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong H$) 上定义 T 如 (5.3.1). 则由 (5.3.2)、引理 5.3.2 (1) 得，T 为一个 $F(p_0, r_0, q_0)$ 类算子. 同时，由 (5.3.3)、引理 5.3.2 (1) 得，T 不是一个 $F(p, r_0, q_0)$ 类算子.

推论 5.3.1 为定理 5.3.1 与定理 5.2.3 的直接结果.

下面将对 $wF(p,r,q)$ 类中的算子做类似上面的讨论，这些讨论是与 5.2 节相联系的，故先回忆相应的结论.

定理 5.3.E 设 $p_0 > 0$, $r \geq r_0 \geq 0$, $q \geq q_0 \geq 1$ 且 $r_0q_0 \leq p_0 + r_0$. 若 T 为一个 $wF(p_0, r_0, q_0)$ 类算子，则下列结论成立：

(1) 当 $rq_0 \leq p_0 + r$ 时，T 为一个 $wF(p_0, r, q_0)$ 算子.

(2) 当 $r_0q \leq p_0 + r_0$ 时，T 为一个 $wF(p_0, r_0, q)$ 类算子.

定理 5.3.E 为定理 5.3.A 与定理 5.2.3 的直接结果.

定理 5.3.F 设 $p \geq p_0 > 0$, $r \geq r_0 \geq 0$, $0 < \delta_0 \leq p_0$. 若 T 为一个

$F\Big(p_0, r_0, \dfrac{p_0+r_0}{\delta_0+r_0}\Big)$ 类算子，则 T 属于 $F\Big(p, r, \dfrac{p+r}{\delta_0+r}\Big)$ 类.

定理 5.3.F 即为推论 5.2.3.

当 $q_0 \geq 1$, $r_0q_0 \leq p_0+r_0$ (等价于 $0 \leq \delta \leq p_0$) 及 $rq_0 \leq p_0+r_0$ 时，由 $q_0 \geq \dfrac{p_0+r}{\delta+r}$ 得，定理 5.3.F 的 $p=p_0$ 情形可推出定理 5.3.E (1), 即定理 5.3.F 的 $p=p_0$ 情形为定理 5.3.E (1) 的推广. 这里给出下列与定理 5.3.F 相关的结论.

定理 5.3.2　设 $p_0>0$, $r_0>0$, $q_0>1$. 若

$$p_0 \leq (1+r_0)q_0-r_0, \quad r_0 \leq (1+p_0)q_0^*-p_0,$$

其中 q_0^* 是 q_0 的共轭数，则下列结论成立：

(1) 当 $p>(1+r_0)q_0-r_0$ 时，存在一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子 T, 但 T 不是一个 $wF(p,r_0,q_0)$ 类算子；

(2) 当 $r>(1+p_0)q_0^*-p_0$ 时，存在一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子 T, 但 T 不是一个 $wF(p_0,r,q_0)$ 类算子.

定理 5.3.2 (1) 表明当 $r=r_0$ 时定理 5.3.F 不能类似定理 5.3.E (1) 推广到定理 5.3.F 的 $p=p_0$ 情形被推广为：

设 $p \geq p_0>0$, $r_0 \geq 0$ 且 $q_0 \geq 1$. 若 T 为一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子，则 T 为一个 $wF(p,r_0,q_0)$ 类算子.

类似地，定理 5.3.2 (2) 表明当 $p=p_0$ 时定理 5.3.F 不能被推广为：

设 $p_0>0$, $r \geq r_0 \geq 0$ 且 $q_0 \geq 1$. 若 T 为一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子，则 T 为一个 $wF(p_0,r,q_0)$ 类算子.

定理 5.3.E (1) 与定理 5.3.2 (2) 同时成立，这是很有趣的，下面说明这并不矛盾.

事实上，当 $q_0>1$ 时，定理 5.3.E (1) 中条件 $r \geq r_0$ 且 $rq_0 \leq p_0+r$ 等价于 $\dfrac{p_0}{q_0-1} \geq r \geq r_0$. 同时，定理 5.3.2 (2) 中条件 $p_0 \leq (1+r_0)q_0-r_0$, $r_0 \leq (1+p_0)q_0^*-p_0$ 及 $r>(1+p_0)q_0^*-p_0$ 分别等价于 $r_0 \geq \dfrac{p_0}{q_0-1}-\dfrac{q_0}{q_0-1}$, $r_0 \leq \dfrac{p_0}{q_0-1}+\dfrac{q_0}{q_0-1}$ 及 $r>\dfrac{p_0}{q_0-1}+\dfrac{q_0}{q_0-1}$.

我们准备下面的结论以给出证明.

引理 5.3.3 设 $p_0>0$, $r_0>0$ 且 $q_0>1$, 则下列结论成立:

(1) 若

$$p_0 \le (1+r_0)q_0 - r_0, \quad r_0 \le (1+p_0)q_0^* - p_0,$$
$$p > (1+r_0)q_0 - r_0,$$

则存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正算子 A 与 B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p_0}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \ge B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \ge \left(A^{\frac{p_0}{2}}B^{r_0}A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}},$$
$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\ge B^{\frac{p+r_0}{q_0}};$$

(2) 若

$$p_0 \le (1+r_0)q_0 - r_0, \quad r_0 \le (1+p_0)q_0^* - p_0,$$
$$r > (1+p_0)q_0^* - p_0,$$

则存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正算子 A 与 B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p_0}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \ge B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \ge \left(A^{\frac{p_0}{2}}B^{r_0}A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}},$$
$$A^{\frac{p_0+r}{q_0^*}} \not\ge \left(A^{\frac{p_0}{2}}B^{r}A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}}.$$

引理 5.3.3 为定理 5.3.C 与定理 5.3.F 的直接结果.

定理 5.3.2 (1) 的证明 由引理 5.3.3 (1), 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B 满足

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p_0}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \ge B^{\frac{p_0+r_0}{q_0}}, \quad A^{\frac{p_0+r_0}{q_0^*}} \ge \left(A^{\frac{p_0}{2}}B^{r_0}A^{\frac{p_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0^*}} \tag{5.3.4}$$

及

$$\left(B^{\frac{r_0}{2}}A^{p}B^{\frac{r_0}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}} \not\ge B^{\frac{p+r_0}{q_0}}. \tag{5.3.5}$$

于 $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H_k$ (其中 $H_k \cong \mathbf{R}^2$) 上定义 T 如 (5.3.1). 则由 (5.3.4) 、引理 5.3.2 得 T 为一个 $wF(p_0,r_0,q_0)$ 类算子, 同时, 由 (5.3.5) 、引理 5.3.2 (1) 及定理 5.3.D (1) 得 T 不是一个 $wF(p,r_0,q_0)$ 类算子.

定理 5.3.2 (2) 的证明与定理 5.3.2 (1) 的证明类似, 故省略.

5.4　$A(s,t)$ 类算子的谱性质

设 T 复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，$T=U|T|$ 是 T 的极分解，$T(s,t)=|T|^sU|T|^t$ 是 T 的 **广义 Althuge 变换**, 其中 $0<s,t\leq 1$. 回忆 T 称为是 $A(s,t)$ 类算子，如果

$$|T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}}\geq |T|^{2t}.$$

特别地，$A(1,1)$ 类算子即为 A 类算子，也就是满足条件 $|T^2|\geq |T|^2$ 的算子.

为研究算子的谱性质，常常用到下列结果：

引理 5.4.1　设 $T=U|T|$ 是 T 的极分解，$\lambda=|\lambda|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$, $\{x_n\}$ 是一向量列，则下列条件等价：

(1) $(T-\lambda)x_n\to 0$ 且 $(T^*-\bar{\lambda})x_n\to 0\ (n\to\infty)$;

(2) $(|T|-|\lambda|)x_n\to 0$ 且 $(U-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})x_n\to 0\ (n\to\infty)$;

(3) $(|T^*|-|\lambda|)x_n\to 0$ 且 $(U^*-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})x_n\to 0\ (n\to\infty)$.

证　(1) $\Rightarrow$ (2), (3)　由于 $\|Tx\|=\||T|x\|$, 故有 $Tx_n\to 0$ 当且仅当 $|T|x_n\to 0$; $T^*x_n\to 0$ 当且仅当 $|T^*|x_n\to 0$, 故当 $\lambda=0$ 时，(1) 蕴含 (2), (3) 的前一个式子.

如果 $\lambda\neq 0$, 则 $|T|+|\lambda|$ 及 $|T^*|+|\lambda|$ 都可逆，且由

$$(|T|+|\lambda|)(|T|-|\lambda|)=T^*(T-\lambda)+\lambda(T^*-\bar{\lambda}),\tag{5.4.1}$$

$$(|T^*|+|\lambda|)(|T^*|-|\lambda|)=T(T^*-\bar{\lambda})+\bar{\lambda}(T-\lambda),\tag{5.4.2}$$

$$|\lambda|(U-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=T-\lambda-U(|T|-|\lambda|),\tag{5.4.3}$$

$$|\lambda|(U^*-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=T^*-\bar{\lambda}-U^*(|T^*|-|\lambda|),\tag{5.4.4}$$

可知 (2),(3) 成立.

反之，由 (2),(3) 成立，应用上面 4 个式子也可以看出 (1) 成立.

引理 5.4.2　设 $T\geq 0$, $\alpha>0$, 则

(1) $Tx=0\Leftrightarrow (Tx,x)=0$;

(2) $\| Tx_n \| \to 0 \Leftrightarrow (Tx_n, x_n) \to 0$, 其中 $n \to \infty$ 且 $\{x_n\}$ 是 H 中一有界向量列;

(3) $Tx_n \to 0, (n \to \infty) \Leftrightarrow T^\alpha x_n \to 0$, 其中 $n \to \infty$ 且 $\{x_n\}$ 是 H 中一有界向量列.

引理 5.4.3 设 T 是 A 类算子, 且 $0 \neq \lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbf{C}$, $\{x_n\}$ 是单位向量列.

(1) 若 $(T-\lambda)x_n \to 0$, 则 $(T-\lambda)^* x_n \to 0$, $(|T|-|\lambda|)x_n \to 0$, $(U-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})x_n \to 0$, $(U-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^* x_n \to 0$, 故 $\sigma_a(T) - \{0\} \subseteq \sigma_{ja}(T)$, 即近似非零点谱包含在联合近似点谱中.

(2) 若 $\lambda \neq 0$ 是 T 的一个特征值, 则 $N(T-\lambda) \subseteq N((T-\lambda)^*)$, 即 $N(T-\lambda)$ 约化 T.

证 由于 A 类算子满足 $|T|^2 \leq |T^2|$, 故

$$\begin{aligned}\| Tx_n \|^2 &= (|T|^2 x_n, x_n) \leq (|T^2| x_n, x_n) \\ &\leq \| \, |T^2| x_n \| = \|T^2 x_n\|,\end{aligned}$$

以及 $\| Tx_n \|^2 \to r^2$, $\| T^2 x_n \| \to r^2$, 知 $(|T^2|x_n, x_n) \to r^2$, 故当 $n \to \infty$ 时有

$$\left\|(|T^2| - r^2)\, x_n\right\|^2 = \left\||T^2| x_n\right\|^2 - 2r^2(|T^2|x_n, x_n) + r^4 \to 0.$$

又由 $|T^2| - T^*T \geq 0$ 及

$$\Big((|T^2| - T^*T)\, x_n, x_n\Big) \leq \|T^2 x_n\| - \|Tx_n\|^2 \to 0,$$

应用引理 5.4.2 得 $(|T^2| - T^*T)\, x_n \to 0 \ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned}\left\|(\lambda T^* - r^2)\, x_n\right\| &\leq \left\|(|T^2| - r^2)\, x_n\right\| + \left\|(|T^2| - T^*T)\, x_n\right\| \\ &\quad + \|T^*(T-\lambda)\, x_n\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

故 $(T^* - \lambda^*)\, x_n \to 0$, 再由引理 5.4.1 得证.

定义 1 设一个有界线性算子 $T: H \to H'$ 满足：存在有界线性算子 $B: H' \to H$ 及紧算子 $K: H$ (或 H') $\to H$ (或 H') 使 $BT = I + K$ (或 $TB = I + K$), 称 T 为**左（右）半 Fredholm 算子**, 简称 T 为**半 Fredholm 算子**.

可证 T 为左半 Fredholm 算子 $\Leftrightarrow T$ 的值域闭且 $\dim N(T) < \infty$.

对半 Fredholm 算子 T, 可定义其 Fredholm 指标

$$\operatorname{ind} T = \dim N(T) - \dim(R(T))^{\perp} = \dim N(T) - \dim N(T^*).$$

定理 5.4.A [18] Fredholm 指标是 $\{$半 Fredholm 算子$\} \to \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ 上的连续映射.

由定理 5.4.A, 易见有下列引理：

引理 5.4.4 设 $T(s): [0,1] \to B(H)$ 是范数连续映射，即 $s_n, s \in [0,1]$, $s_n \to s$ 蕴含 $\|T(s_n) - T(s)\| \to 0$, 及 $T(0), T(1)$ 是半 Fredholm 算子且使 $\operatorname{ind} T(0) \neq \operatorname{ind} T(1)$, 则存在 $s_0 \in (0,1)$, 使 $T(s_0)$ 不是半 Fredholm 算子，从而 $0 \in \sigma_a(T(s_0))$.

事实上，若 $0 \notin \sigma_a(T(s_0))$, 存在 $c > 0$, 使 $\|T(s_0)x\| \geq c\|x\|$, 从而 $T(s_0)$ 的值域闭且 $N(T(s_0)) = \{0\}$, 故为半 Fredholm 算子.

引理 5.4.5 设 $T = U|T|$ 是 $A(s,t)$ 算子，$s,t > 0$, 则 $T(s,t) = |T|^s U |T|^t$ 是 $\dfrac{\min\{s,t\}}{s+t}$- 亚正常算子.

证 由 $|T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} \geq |T|^{2t}$, 可得

$$(|T^*|^t |T|^{2s} |T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}.$$

故由引理 5.4.2 知

$$|T|^{2s} \geq (|T|^s |T^*|^{2t} |T|^s)^{\frac{s}{s+t}} = |T(s,t)^*|^{\frac{2s}{s+t}},$$

再由 Löwner-Heinz 不等式知结论成立.

定理 5.4.1 设 $T = U|T|$ 是 $A(s,t)$ 类算子，且 $0 < s,t \leq 1$, 当 $s+t \geq 1$ 时，取 $\alpha \geq 0$, 当 $0 < s+t < 1$ 时，取 α 使 $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1-\max\{s,t\}}{1-s-t}$, 令

$S(\alpha) = U|T|^{1+\alpha(s+t-1)}$, 则 $S(\alpha)$ 是 $A\Big(\dfrac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \dfrac{t}{1+\alpha(s+t-1)}\Big)$ 类算子，且

$$\sigma_a(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma_a(T)\}, \tag{5.4.5}$$

$$\sigma(S(\alpha)\backslash\sigma_a(S(\alpha))) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(T)\backslash\sigma_a(T)\}. \tag{5.4.6}$$

故

$$\sigma(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(T)\}.$$

特别地，$\sigma(U|T|^{s+t}) = \{r^{s+t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(T)\}$.

证 显见 $S(\alpha)$ 是 $A\Big(\dfrac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \dfrac{t}{1+\alpha(s+t-1)}\Big)$ 类算子，又

$$0 < \frac{s}{1+\alpha(s+t-1)} \leq 1, \quad 0 < \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)} \leq 1.$$

由推论 5.2.2 知，T 是 A 类算子. 先证 (5.4.5). 若 $0 \in \sigma_a(T)$, 则存在单位向量 x_n 使 $Tx_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 由引理 5.4.1 知，$|T|x_n \to 0$, 从而 $S(\alpha)\,x_n \to 0$, 于是 $0 \in \sigma_a(S(\alpha))$. 现令 $0 \neq \lambda = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma_a(T)$, 则由引理 5.4.3, 存在单位向量 x_n 使

$$(|T| - r)\,x_n \to 0, \quad (U - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,x_n \to 0.$$

故

$$\begin{aligned}
&\Big\|(S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,x_n\Big\| \\
&= \Big\|(U|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - r^{1+\alpha(s+t-1)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,x_n\Big\| \\
&\leq \Big\|U(|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - r^{1+\alpha(s+t-1)})\,x_n\Big\| \\
&\quad + \Big\|r^{1+\alpha(s+t-1)}(U - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,x_n\Big\| \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

这里用到当 $A \geq 0$ 时，$\beta > 0$, $r > 0$, 如果 $\|x_n\| = 1$ 使 $(A - r)\,x_n \to 0$, 则 $(A^{\beta} - r^{\beta})\,x_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 因为 $\forall \varepsilon > 0$, 存在多项式 $g(t)$ 使

$$|t^{\beta} - g(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in \sigma(A),$$

于是 $\|A^\beta - g(A)\| \le \varepsilon$. 故

$$\|(A^\beta - r^\beta)x_n\| \le \|A^\beta - g(A)\| + \|(g(A) - g(r))x_n\| + |g(r) - r^\beta|.$$

因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|(A^\beta - r^\beta)x_n\| \le 2\varepsilon$, 故结论成立.

反之, 如果 $0 \in \sigma_a(S(\alpha))$, 则存在单位向量 x_n 使 $S(\alpha)(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, 于是

$$|T|^{1+\alpha(s+t-1)}x_n = U^*U|T|^{1+\alpha(s+t-1)}x_n \to 0,$$

从而由引理 5.4.2 得 $|T|x_n \to 0$, 即 $0 \in \sigma_a(T)$.

如果 $0 \ne \mu e^{i\theta} \in \sigma_a(S(\alpha))$, 则存在单位向量 x_n 使 $(S(\alpha) - \mu e^{i\theta})x_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 由 $S(\alpha)$ 也是 A 类算子及引理 5.4.3 得

$$(|S(\alpha)| - \mu)(x_n) = (|T|^{1+\alpha(s+t-1)} - \mu)x_n \to 0$$

及 $(U - e^{i\theta})x_n \to 0$. 于是根据

$$\begin{aligned}&\left(T - \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}e^{i\theta}\right)x_n\\ &\quad = U\left(|T| - \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}\right)x_n + \mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}(U - e^{i\theta})x_n,\end{aligned}$$

得 $\mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$. 于是 (5.4.5) 得证.

下证 (5.4.6). 设 $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 则 $R(T)$ 闭且 $R(T) \ne H$ 及 $N(T) = \{0\}$. 由 [18] 知 $S(\alpha)$ 的值域也闭, 且

$$N(S(\alpha)) = N(|T|) = \{0\},$$

故 $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ 蕴含 $0 \notin \sigma_a(S(\alpha))$. 又 $0 \in \rho(T) \Leftrightarrow 0 \in \rho(S(\alpha))$, 故 $0 \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$. 现设 $0 \ne \lambda = re^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, 由 (5.4.5) 得 $r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \notin \sigma_a(S(\alpha))$.

下证 $r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \in \sigma(S(\alpha))$. 事实上, 若 $r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \notin \sigma(S(\alpha))$, 则 $S'(\alpha') : [0, \alpha] \mapsto \mathcal{B}(H)$,

$$S'(\alpha') = U|T|^{1+\alpha'(s+t-1)} - r^{1+\alpha'(s+t-1)}e^{i\theta}$$

是范数连续的, 且 $S'(0) = T - \lambda$ 是半 Fredholm 及 $\operatorname{ind} S'(0) \le -1$; 而 $S'(\alpha) = S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta}$ 可逆, 故由引理 5.4.4 知, 存在 $\alpha_1 \in (0, \alpha)$,

使 $r^{1+\alpha_1(s+t-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma_a(S(\alpha_1))$, 仿照 (5.4.5) 式后半部分的证明可得 $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma_a(T)$, 矛盾. 故 $r^{1+\alpha(s+t-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$.

反之, 若 $0 \in \sigma(S(\alpha))\setminus\sigma_a(S(\alpha))$, 则类似上面可证 $0 \in \sigma(T)\setminus\sigma_a(T)$, 及 $0 \neq \mu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$,

令 $S''(\alpha'') : [0,\alpha] \to \mathcal{B}(H)$,

$$\alpha'' \mapsto U|T|^{1+\alpha''(s+t-1)} - \mu^{\frac{1+\alpha''(s+t-1)}{1+\alpha(s+t-1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

类似可证 $\mu^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$.

5.5 $wF(p,r,q)$ 类算子的谱性质

首先, 我们回忆如果 H 上的有界线性算子 T 的谱可表示成 $\sigma(T) = F_1 \bigcup F_2$, 其中 F_1, F_2 是两个非空不交闭集, 则可取在 F_2 外部, 并使得 F_1 位于其内部的围线 Γ. 令

$$A = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma (z-T)^{-1}\mathrm{d}z,$$

则可验证 A 是一个非平凡的幂等算子, 且 $AT = TA$, $\sigma(AT) = F_1 \bigcup \{0\}$. 事实上, 当 $u \in F_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} AT - u &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \left[T(z-T)^{-1} - u(z-u)^{-1}\right]\mathrm{d}z \\ &= (T-u)\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma z(z-T)^{-1}(z-u)^{-1}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

同理, 当 $u \in F_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} AT &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \left[T(z-T)^{-1} - u(z-u)^{-1}\right]\mathrm{d}z \\ &= (T-u)\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma z(z-T)^{-1}(z-u)^{-1}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

于是 $F_1 \bigcup \{0\} \subseteq \sigma(AT)$.

另一方面, 当 ξ 不在 $F_1 \bigcup \{0\}$ 中时, 由

$$(T-\xi)\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(z-\xi)^{-1}(z-T)^{-1}\mathrm{d}z=A,$$

$$A\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(z-\xi)^{-1}(z-T)^{-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(z-\xi)^{-1}(z-T)^{-1}\mathrm{d}z,$$

可知

$$\begin{aligned}&(AT-\xi)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(z-\xi)^{-1}(z-T)^{-1}\mathrm{d}z+\xi^{-1}(A-I)\right]\\&=\Big[A(T-\xi)+(A-I)\xi\Big]\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(z-\xi)^{-1}(z-T)^{-1}\mathrm{d}z\right.\\&\quad\left.+\xi^{-1}(A-I)\right]\\&=(A-I)^2+A=I.\end{aligned}$$

从而 $\sigma(AT)\subseteq F_1\bigcup\{0\}$; 类似地, 有 $\sigma((I-A)T)=F_2\bigcup\{0\}$. 因此当 $\sigma(T)$ 不连通时， T 有非平凡的不变子空间.

其次, 我们知道, 如果 T 是半亚正常算子, 则 $\sigma_{jp}(T)=\sigma_p(T)$. 该结果对 p- 亚正常算子及可逆的对数亚正规算子也成立，可参见 [89],[63],[76], 对 w- 亚正常算子 [4], 有 $\sigma_{jp}(T)-\{0\}=\sigma_p(T)-\{0\}$. 该结果对 $p-w$- 亚正常算子也成立，见 [106]. 本节指出此结果对 $wF(p,r,q)$ 类算子也有类似的结果，为此先给出几个引理.

引理 5.5.1　设 $T=U|T|$ 是 $wF(p,r,q)$ 类算子 T 的极分解， $p+r=1$, 且 $q\geq 1$. 如果 $\tilde{T}_{p,r}$ 具有性质：$(\tilde{T}_{p,r})x=\lambda x$, $\lambda\neq 0$ 可蕴含 $(\tilde{T}_{p,r})^*x=\bar{\lambda}x$, 则 T 亦具有该性质.

证　设 $\lambda=|\lambda|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$, 且 $Tx=\lambda x$, 故

$$(\tilde{T}_{p,r})(|T|^p x)=|T|^pU|T|x=\lambda|T|^p x.$$

由假设可知 $(\tilde{T}_{p,r})^*(|T|^p x)=\bar{\lambda}|T|^p x$. 结果对每个 $\alpha>0$, 有

$$\begin{aligned}|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha}(|T|^p x)&=((\tilde{T}_{p,r})^*\tilde{T}_{p,r})^{\frac{\alpha}{2}}(|T|^p x)\\&=|\lambda|^{\alpha}(|T|^p x)=(\tilde{T}_{p,r}\tilde{T}_{p,r}^*)^{\frac{\alpha}{2}}(|T|^p x)\\&=|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{\alpha}(|T|^p x).\end{aligned}$$

因为 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，故由定理 5.2.7 知，存在 $\alpha_0>0$, 使 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 α_0- 亚正常算子，于是

$$\begin{aligned}|\lambda|^{\alpha_0}\Big(|T|^px,|T|^px\Big) &= \Big(|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0}(|T|^px),|T|^px\Big)\\ &\geq \Big(|T|^{\alpha_0}(|T|^px),|T|^px\Big)\\ &\geq \Big(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{\alpha_0}(|T|^px),|T|^px\Big)\\ &= |\lambda|^{\alpha_0}\Big(|T|^px,|T|^px\Big).\end{aligned}$$

故 $\Big((|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0}-|T|^{\alpha_0})|T|^px,|T|^px\Big)=0$.

再由 $|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0}\geq|T|^{\alpha_0}$ 知 $(|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0}-|T|^{\alpha_0})|T|^px=0$. 从而

$$|T|^{\alpha_0}(|T|^px)=|\tilde{T}_{p,r}|^{\alpha_0}(|T|^px)=|\lambda|^{\alpha_0}(|T|^px),$$

进而 $|T|(|T|^px)=|\lambda|(|T|^px)$, 或有

$$(|T|x-|\lambda|x)\in N(|T|^p)=N(|T|)=N(U),$$

即有 $U|T|x=U|\lambda|x$, 即 $Ux=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x$.

另外，由于

$$\begin{aligned}0&\leq\|U^*x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x\|^2\\ &=\|U^*x\|^2-(U^*x,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)-(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x,U^*x)+\|x\|^2\\ &=\|U^*x\|^2-\|x\|^2\leq0,\end{aligned}$$

故 $U^*x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x$, $|T|x=\lambda U^*x=|\lambda|x$, 因而 $T^*x=|T|U^*x=\bar{\lambda}x$.

定理 5.5.1 设 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，且 $p+r=1$, $q\geq1$.

(1) 如果 $Tx=\lambda x$, $\lambda\neq0$, 则 $T^*x=\bar{\lambda}x$.

(2) 有 $\sigma_{jp}(T)-\{0\}=\sigma_p(T)-\{0\}$.

(3) 如果 $Tx=\lambda x$, $Ty=\mu y$, 且 $\lambda\neq\mu$, 则 $(x,y)=0$.

特别地，当 T 是 $wA(p,r)$ 类算子，其中 $p+r=1$, 且 $p,r>0$ 时，上述 (1)~(3) 都成立.

证 (1) 由引理 5.5.1, 只要证明 $\tilde{T}_{p,r}$ 具有性质：$(\tilde{T}_{p,r})x=\lambda x$, $\lambda\neq0$ 蕴含 $(\tilde{T}_{p,r})^*x=\overline{\lambda}x$. 事实上，由定理 5.2.7 知存在 $\alpha_0>0$ 使 $\tilde{T}_{p,r}$ 是 α_0-

亚正常的，而对 $p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 亚正常算子，有 $\sigma_{jp}(T)=\sigma_p(T)$ (见 [76])，故上述结论成立.

(2),(3) 可由 (1) 得出.

利用 Berberian 的技巧，可证下列结果：

定理 5.5.2　设 T 是 $wF(p,r,q)$ 算子，且 $p+r=1$, $q\geq 1$, 则

$$\sigma_{ja}(T)-\{0\}=\sigma_a(T)-\{0\}.$$

引理 5.5.2 (Berberian)[89]　设 H 是复 Hilbert 空间，则存在一个复 Hilbert 空间 $K\supseteq H$ 及一个映射 $\varphi:B(H)\to B(K)$ 使

(1)　φ 是一个 *- 代数同构，即 φ 满足

(a)　$\varphi(\alpha A+\beta B)=\alpha\varphi(A)+\beta\varphi(B)$, $\forall A,B\in B(H)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$;

(b)　$\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$;

(c)　$\varphi(A^*)=\varphi(A)^*$;

(d)　当 $\varphi(A)=0$ 时，必有 $A=0$;

(2)　φ 是一个等距，保序映射，当 $A\geq 0$ 时，有 $\varphi(A)\geq 0$;

(3)　$\sigma_a(T)=\sigma_a(\varphi(T))=\sigma_p(\varphi(T))$,　$\forall T\in B(H)$;

(4)　$\sigma_{ja}(T)=\sigma_{jp}(\varphi(T))$,　$\sigma(T)=\sigma(\varphi(T))$.

现给出定理 5.5.2 的证明如下：

定理 5.5.2 的证明　设 $\varphi:B(H)\to B(K)$ 是上述引理所述一个 *- 代数同构，且 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，则

$$\begin{aligned}&(|\varphi(T^*)|^r|\varphi(T)|^{2p}|\varphi(T^*)|^r)^{\frac{1}{q}}\\&=\varphi\left((|T^*|^r||T|^{2p}|T^*|^r|)^{\frac{1}{q}}\right)\\&\geq\varphi\left(|T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}}\right)=|\varphi(T^*)|^{\frac{2(p+r)}{q}}.\end{aligned}$$

类似可证

$$|\varphi(T)|^{2(p+r)\left(1-\frac{1}{q}\right)}\geq(|\varphi(T)|^p|\varphi(T^*)|^{2r}|\varphi(T)|^p)^{1-\frac{1}{q}},$$

从而 $\varphi(T)$ 也是 $wF(p,r,q)$ 类算子，对 $p+r=1$, 且 $q\geq 1$, 于是有

$$\sigma_a(T)-\{0\}=\sigma_a(\varphi(T))-\{0\}=\sigma_p(\varphi(T))-\{0\}$$
$$=\sigma_{jp}(\varphi(T))-\{0\}=\sigma_{ja}(T)-\{0\}.$$

推论 5.5.1 如果 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，且 $p+r=1$, $q\geq 1$, 则

$$\sigma(T)-\{0\}=(\sigma_a(T^*)-\{0\})^*=\{\lambda:\bar{\lambda}\in\sigma_a(T^*)-\{0\}\}.$$

证 显见，只需证明 $\sigma(T)-\{0\}\subseteq(\sigma_a(T^*)-\{0\})^*$. 事实上，由 [89] 知，$\sigma(T)=\sigma_a(T)\cup\sigma_p(T^*)^*$, 对一切 $T\in B(H)$ 成立. 由 $\sigma_p(T^*)^*\subseteq\sigma_a(T^*)^*$ 及由定理 5.5.2, 得

$$\sigma_a(T)-\{0\}=\sigma_{ja}(T)-\{0\}\subseteq(\sigma_a(T^*)-\{0\})^*.$$

推论 5.5.2 设 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子，对 $p+r=1$, $q\geq 1$, 如果 $\lambda\neq 0$ 使 $\lambda\in\sigma_a(T)$, 则 $|\lambda|\in\sigma_a(|T|)\cap\sigma_a(|T^*|)$.

证 由定理 5.5.2 得 $\sigma_a(T)-\{0\}=\sigma_{ja}(T)-\{0\}$, 故 $\lambda\in\sigma_{ja}(T)-\{0\}$, 从而存在向量列 x_n, 使

$$(T-\lambda)\,x_n\to 0,\ (T^*-\bar{\lambda})\,x_n\to 0\quad(n\to\infty).$$

由引理 5.4.1 可得

$$(|T|-|\lambda|)\,x_n\to 0,\ (|T^*|-|\lambda|)\,x_n\to 0\quad(n\to\infty).$$

从而 $|\lambda|\in\sigma_a(|T|)\cap\sigma_a(|T^*|)$.

最后，考虑 T 与 $|T|$ 的谱之间的关系. 回忆下列结果:

定理 5.5.A [16],[89] 若 T 是 p- 亚正常的，则 $\sigma(|T|)\subseteq\rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ 是由 $\rho(z)=|z|$ 所定义的映射.

类似地，A. Aluthge 和 D. Wang 在 Hokkaido Mathematical Journal Vol XXIX, No.2 中证明了:

定理 5.5.B 若 T 是 w- 亚正常的，且 $\sigma(T)$ 连通，则 $\sigma(|T|)\subseteq\rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho(z)=|z|$.

我们把这一结果推广至 $wF(p,r,q)$ 类算子. 为此先回忆数值值域 $W(T)=\{(Tx,x):x\in H$, 是单位向量 $\}$, 用 $\overline{W(T)}$ 表示 $W(T)$ 的闭

包. 我们知道 $W(T)$ 是凸集且 $\mathrm{Conv}\,\sigma(T)\subseteq\overline{W(T)}$. 此外, 若 T 正规, 则 $\overline{W(T)}=\mathrm{Conv}\,\sigma(T)$ (见 [50]).

引理 5.5.3 [63] *设 A,B 是 H 上的有界线性算子, 且 $A^*=A$, 则 AB 可逆当且仅当 BA 可逆.*

证 如果 AB 可逆, 则存在 X 使得 $ABX=I$, 故 $(BX)^*A=I$, 从而 A 及 B 可逆, 于是 BA 可逆.

引理 5.5.4 *设 $T=U|T|$ 是 T 的极分解, 则 $\sigma(T)=\sigma(\widetilde{T}_{p,r})$, 其中 $p,r>0$ 且 $p+r=1$.*

证 由引理 5.5.3 及 $\sigma(AB)-\{0\}=\sigma(BA)-\{0\}$ 可知.

引理 5.5.5 *$(\mathrm{Conv}\,\sigma(|T|))^{\alpha_0}=\mathrm{Conv}\,\sigma(|T|^{\alpha_0})=\mathrm{Conv}(\sigma(|T|))^{\alpha_0}$ 对一切 $T\in\mathcal{B}(H)$ 及 $\alpha_0>0$ 成立, 其中 $(\sigma(|T|))^{\alpha_0}=\{z^{\alpha_0}:z\in\sigma(|T|)\}$.*

证 由于 $\mathrm{Conv}\,\sigma(|T|)=[m,M]$, 其中 $M=\sup\{\mu:\mu\in\sigma(|T|)\}$ 及 $m=\inf\{\mu:\mu\in\sigma(|T|)\}$, 故

$$\begin{aligned}(\mathrm{Conv}\,\sigma(|T|))^{\alpha_0}&=[m^{\alpha_0},M^{\alpha_0}]=\mathrm{Conv}\,\sigma(|T|^{\alpha_0})\\&=\mathrm{Conv}(\sigma(|T|))^{\alpha_0}.\end{aligned}$$

引理 5.5.6 *设 $T=U|T|$ 是 $wF(p,r,q)$ 类算子, $p+r=1$, $q\geq 1$, 则*

(1) $\overline{W}(|\tilde{T}_{p,r}|)\subseteq\overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$;

(2) $\sigma(|T|)\subseteq\overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$.

证 (1) 由于 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子, 由定理 5.2.7 知存在 $\alpha_0>0$, 使 $\widetilde{T}_{p,r}$ 是 α_0- 亚正常算子, 即

$$|\widetilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0}\geq|T|^{2\alpha_0}\geq|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}. \tag{5.5.1}$$

因为 $\sigma(|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^2)-\{0\}=\sigma(|\widetilde{T}_{p,r}|^2)-\{0\}$, 故

$$\sigma(|(\widetilde{T}_{p,r})^*|)-\{0\}=\sigma(|\widetilde{T}_{p,r}|)-\{0\}.$$

又由 $|\widetilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0}\geq|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}$, 故当 $0\in\sigma(|\widetilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0})$ 时, 有 $0\in\sigma(|(\widetilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$,

从而可知，如果 $0 \in \sigma(|\tilde{T}_{p,r}|)$, 就有 $0 \in \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 即 $\sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 结果有

$$\overline{W}(|\tilde{T}_{p,r}|) = \operatorname{Conv}\sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \operatorname{Conv}\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) = \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|).$$

(2) 对 H 中任一单位向量 x, 有

$$((|\tilde{T}_{p,r}|^{2\alpha_0})\, x, x) \in W((|\tilde{T}_{p,r}|)^{2\alpha_0}) \subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0}),$$

故 $((|T|^{2\alpha_0})\, x, x) \in \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$. 这是由于 (5.5.1) 及 $\overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|^{2\alpha_0})$ 的凸性. 故

$$\begin{aligned}\sigma(|T|^{2\alpha_0}) &\subseteq \operatorname{Conv}\sigma(|T|^{2\alpha_0}) = \overline{W}(|T|^{2\alpha_0})\\ &\subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)^{2\alpha_0}) = \operatorname{Conv}\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)^{2\alpha_0}).\end{aligned}$$

由谱映射定理及引理 5.5.5 得 (2) 成立.

定理 5.5.3 如果 T 是 $wF(p,r,q)$ 类算子, $p+r=1$, $q \geq 1$ 且 $\sigma(T)$ 是连通的, 则 $\sigma(|T|) \subseteq \rho(\sigma(T))$, 其中 $\rho: \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ 是由 $\rho(z) = |z|$ 所定义的映射.

证 由定理 5.5.A 及引理 5.5.4 知

$$\sigma(|\tilde{T}_{p,r}|) \subseteq \rho(\sigma(\tilde{T}_{p,r})) = \rho(\sigma(T)).$$

又若 $0 \in \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)$, 则 $(\tilde{T}_{p,r})^*$ 不可逆, 故 $0 \in \sigma(T)$, 及 $\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) \subseteq \rho(\sigma(T))$ (因为 $\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) - \{0\} = \sigma(|(\tilde{T}_{p,r})|) - \{0\}$).

另一方面, $\sigma(T)$ 是紧连通集, 故 $\rho(\sigma(T))$ 是 $\mathbf{R}$ 中闭凸子集, 故由引理 5.5.6, 得

$$\begin{aligned}\sigma(|T|) &\subseteq \overline{W}(|(\tilde{T}_{p,r})^*|) = \operatorname{Conv}\sigma(|(\tilde{T}_{p,r})^*|)\\ &\subseteq \operatorname{Conv}\rho(\sigma(T)) = \rho(\sigma(T)).\end{aligned}$$

对 w- 亚正常算子, 有

定理 5.5.C 设 T 是 w- 亚正常算子, 如果 $\sigma(|T|)$ 或 $\sigma(|T^*|)$ 不是一个区间, 则 T 有非平凡的不变子空间.

该结果也可推广至 $wF(p,r,q)$ 类算子. 首先回忆：如果复数 λ 使 $R(T-\lambda I)$ 不在 H 中稠密，称 λ 在 T 的**压缩谱** $\sigma_c(T)$ 中. 如果 $T\in\mathcal{B}(H)$, 易知 $\sigma(T)=\sigma_c(T)\cup\sigma_a(T)$ 且如果 $\lambda\in\sigma_c(T)$ 且 $T\neq\lambda I$, 则 $\overline{R}(T-\lambda I)$ 就是 T 的一个非平凡的不变子空间. 另外，如果 $\sigma(T)$ 不连通，由 [18] 知存在一个非平凡的幂等算子，从而 T 也有一个非平凡的不变子空间.

定理 5.5.4 (1) 如果 $T\in wF(p,r,q)$, 且 $p+r=1$, $q\geq 1$. 如果 $\lambda\in\sigma(T)$, $\lambda\neq 0$, 及 $|\lambda|\,\overline{\in}\,\sigma(|T|)\cap\sigma(|T^*|)$, 则 T 有非平凡的不变子空间.

(2) 如果 $T\in wF(p,r,q)$, 且 $p+r=1$, $q\geq 1$. 如果 $\sigma(|T|)$ 或 $\sigma(|T^*|)$ 不连通，则 T 有非平凡的不变子空间.

证 (1) 由推论 5.5.2 知， λ 不在 $\sigma_a(T)$ 中，故 $\lambda\in\sigma_c(T)$, 故结论成立.

(2) 不妨设 $\sigma(|T^*|)$ 不连通. 如果 $\sigma(T)$ 不连通，则可找到一个非平凡的幂等算子与 T 可换，从而结论显见，故可设 $\sigma(T)$ 连通，由 $\sigma(|T^*|)$ 不是一个区间，从而存在 $s,t\in\sigma(|T^*|)$, $0\leq s<t$ 使 $(s,t)\cap\sigma(|T^*|)=\emptyset$.

令 $N=\{y:s<|y|<t\}$, 由于 $\sigma(|T|)-\{0\}=(\sigma(|T^*|)-\{0\}$, 那么由定理 5.5.3 知，存在 $v\in\sigma(T)$, 使 $|v|=t$.

类似地，如果 $s>0$, 存在 $u\in\sigma(T)$, 使 $|u|=s$.

如果 $s=0$, 则 T^* 不可逆，从而 $0\in\sigma(T)$, 故圆环 N 的内、外边界都含有 $\sigma(T)$ 中一点，故由连通性 $N\cap\sigma(T)\neq\emptyset$, 即存在 $\lambda\in N\cap\sigma(T)$, 即 $|\lambda|\in(s,t)$ 且 $|\lambda|\,\overline{\in}\,\sigma(|T^*|)$, 从而 λ 满足 (i) 中的条件，因此结论成立.

5.6 p- 亚正常算子及对数 - 亚正常算子的幂

设 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，本节讨论 p- 亚正常算子及对数 - 亚正常算子的幂的不等式. 首先回忆一下关于幂的一些结果.

定理 5.6.A [56] 设 T 是 p- 亚正常算子， $p\in(0,1]$, 则对一切正整数 n 有

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{p+1}{n}}\geq\cdots\geq(T^{2*}T^2)^{\frac{p+1}{2}}\geq(T^*T)^{p+1}$$

及

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^2T^{2*})^{\frac{p+1}{2}} \geq \cdots \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p+1}{n}}.$$

定理 5.6.B [66],[108] 设 $k, m \in \mathbf{N}$, 若 T 是 p- 亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

(1) 当 $m \geq p$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p+1}{m+1}} \geq (T^*T)^{p+1},$$

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p+1}{m+1}};$$

(2) 当 $m < p$ 时,

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

注 该定理 (2) 的证明可直接由 p- 亚正常算子的定义和 L-H 不等式得出; (1) 的证明可用归纳法证明: 如 $m = k+1$ 时, 先由 (2) 和 L-H 不等式得

$$A_k = (T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (T^*T)^p \geq B_1,$$

于是

$$\begin{aligned}(T^{k+1*}T^{k+1})^{\frac{p+1}{k+1}} &= U^*\left(B_1^{\frac{1}{2p}} A_k^{\frac{k}{p}} B_1^{\frac{1}{2p}}\right)^{\frac{p+1}{k+1}} U \\ &\geq U^* B_1^{1+\frac{1}{p}} U = (T^*T)^{1+p}.\end{aligned}$$

定理 5.6.C [90] 若 T 是对数 - 亚正规算子, 则对一切自然数 n, 都有

$$(T^{n+1*}T^{n+1})^{\frac{n}{n+1}} \geq T^{n*}T^n, \quad (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{n}{n+1}} \leq T^nT^{n*}.$$

定理 5.6.D [108] 若 T 是对数 - 亚正规算子, 则对一切 $m, n \in \mathbf{N}$, 都有

$$(T^{m+n*}T^{m+n})^{\frac{n}{m+n}} \geq T^{n*}T^n, \quad (T^{m+n}T^{m+n*})^{\frac{n}{m+n}} \leq T^nT^{n*}.$$

首先证明下面的定理:

定理 5.6.1 下列条件等价:

(1) 设 $m, k \in \mathbf{N}$, 若 $k \geq 1, m \geq p$ 且 T 是 p- 亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

$$(T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+p}{1+m}} \geq (T^*T)^{1+p},$$

$$(TT^*)^{p+1} \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p+1}{m+1}};$$

(2) 设 $m, k \in \mathbf{N}$, 若 $k \geq 1$, $m < p$ 且 T 是 p- 亚正常算子, $p \in (k-1, k]$, 则

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

证　(1) $\Rightarrow$ (2)　设 $k \geq 2$, $m, k \in \mathbf{N}$, 如果对某 $p \in (k-1, k]$, T 是 p- 亚正常算子, 则对每个 $m \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, T 是 m- 亚正常算子; 当 $m = 1$ 时, 由此时 T 是亚正常的, 从而 $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2$; 当 $m \geq 2$ 时, 在 (1) 中取 $k = p = m$ 得

$$T^{m+1*}T^{m+1} \geq (T^*T)^{m+1}, \quad (TT^*)^{m+1} \geq T^{m+1}T^{m+1*}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)　设 $k \geq 1$, $m, k \in \mathbf{N}$. 如果对某 $p \in (k-1, k]$, T 是 p- 亚正常算子, 则

$$T^{k*}T^k \geq (T^*T)^k, \quad (TT^*)^k \geq T^kT^{k*}.$$

故由 L-H 不等式得

$$(T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^kT^{k*})^{\frac{p}{k}}.$$

(a) 如果 $m = k$, 由 $(T^{k*}T^k)^{\frac{p}{k}} \geq (TT^*)^p$ 及 Furuta 不等式得

$$\begin{aligned}
(T^{k+1*}T^{k+1})^{\frac{p+1}{k+1}} &= (U^*|T^*|T^{k*}T^k|T^*|U)^{\frac{p+1}{k+1}} \\
&= U^*\left[(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}(|T^k|^{\frac{2p}{k}})^{\frac{k}{p}}(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}\right]^{\frac{p+1}{k+1}}U \\
&\geq U^*(|T^*|^{2p})^{\frac{1+p}{p}}U = U^*|T^*|^{2(p+1)}U \\
&= (T^*T)^{1+p}.
\end{aligned}$$

类似可证 $(T^{k+1}T^{k+1*})^{\frac{p+1}{k+1}} \leq (TT^*)^{1+p}$.

(b)　假如 (1) 对某 $m \geq k$ 成立, 下证对 $m+1$ 亦成立.

事实上, 由

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^{m+1}T^{m+1*})^{\frac{p}{m+1}},$$

故 $(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (TT^*)^p$. 再利用 Furuta 不等式得

$$\begin{aligned}
&(T^{1+m+1*}T^{1+m+1})^{\frac{p+1}{1+m+1}}\\
&= (U^*|T^*|T^{1+m*}T^{1+m}|T^*|U)^{\frac{p+1}{1+m+1}}\\
&= U^*\left[(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}(|T^{1+m}|^{\frac{2p}{1+m}})^{\frac{m+1}{p}}(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}\right]^{\frac{p+1}{1+m+1}}U\\
&\geq U^*(|T^*|^{2p})^{\frac{1+p}{p}}U = U^*|T^*|^{2(p+1)}U\\
&= (T^*T)^{1+p}.
\end{aligned}$$

类似可证 $(T^{1+m+1}T^{1+m+1*})^{\frac{p+1}{1+m+1}} \leq (TT^*)^{1+p}$.

推论 5.6.1 设 $m,n,k \in \mathbf{N}$, 若 T 是 p- 亚正常算子, 其中 $p \in (k-1,k]$, 则

(1) 当 $n \geq k-1$, $m \geq k-1$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}};$$

(2) 当 $n < k-1$, 或 $m < k-1$ 时,

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}},$$

其中 $r = \min\{m,n\}$.

证 (1) 当 $n,m \geq k-1$ 时, 我们来证

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p, \quad (TT^*)^p \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}}.$$

事实上, 当 $m = k-1$ 时, 由定理 5.6.B (2) 及 L-H 不等式即可证明. 当 $m \geq k$ 时, 由定理 5.6.B (1) 及 L-H 不等式可得

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} \geq (T^*T)^p.$$

类似可证第二个不等式. 从而

$$\begin{aligned}
(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p}{m+1}} &\geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p\\
&\geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{p}{n+1}}.
\end{aligned}$$

(2) 若 $n \le k-1$, 或 $m \le k-1$, 我们来证

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} \ge (T^*T)^{r+1},$$
$$(TT^*)^{r+1} \ge (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}},$$

其中 $r = \min\{m,n\}$.

事实上，当 $m \le k-1$ 时，由定理 5.6.B (2) 及 $\dfrac{r+1}{m+1} \in (0,1]$ 可得；当 $m > k-1$ 时，由定理 5.6.B (1) 知

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{p+1}{m+1}} \ge (T^*T)^{p+1};$$

于是可得

$$(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} \ge (T^*T)^{r+1}.$$

类似可证第二个不等式. 再由 $r+1 \le k-1 \le p$ 得

$$\begin{aligned}(T^{m+1*}T^{m+1})^{\frac{r+1}{m+1}} &\ge (T^*T)^{r+1} \ge (TT^*)^{r+1}\\ &\ge (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{r+1}{n+1}}.\end{aligned}$$

为证明本节的主要结果，首先回忆，由定理 2.2.3 可知下列结果：

引理 5.6.A 设 $A, B \ge 0$, 且对某 $\alpha > 0$, 有 $A^\alpha \ge B^\alpha$, 则对每个 $q \ge 0$ 及 $t \ge 0$, 有 $f(s) = \left(A^{\frac{t}{2}}B^sA^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \ge q$ 上单调下降，$g(s) = \left(B^{\frac{t}{2}}A^sB^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \ge q$ 上单调上升.

引理 5.6.1 设 T 是 p- 亚正常算子，其中 $p \in (k-1,k]$, $k \in \mathbf{N}$, 则

$$(|T^*||T^{m+n}|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} \ge |T^*||T^{m+n}|^{\frac{2(n+p)}{m+n}}|T^*|,$$
$$(|T||T^{m+n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}} \le |T||T^{m+n*}|^{\frac{2(n+p)}{m+n}}|T|,$$

其中 $m, n \in \mathbf{N}$ 且 $m \ge k$.

此外，若 $k = 1, 2$, 则

$$|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| \ge (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}},$$

$$|T||T^{n*}|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T| \le (|T||T^{n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}$$

对一切 $n \in \mathbf{N}$ 均成立.

证 令 $r = \min\{1, p\}$, 则由定理 5.6.A 及 L-H 不等式可得

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{r}{n}} \ge \cdots \ge (T^{2*}T^2)^{\frac{r}{2}} \ge (T^*T)^r \ge (TT^*)^r$$
$$\ge (T^2T^{2*})^{\frac{r}{2}} \ge \cdots \ge (T^nT^{n*})^{\frac{r}{n}}.$$

由此知

$$\left(|T^{m+n}|^{\frac{2}{n+m}}\right)^r \ge (|T^*|^2)^r.$$

故对每个 $t \ge 0$ 及 $q \ge 0$, 函数 $g(s) = \left(|T^*|^t|T^{m+n}|^{\frac{2s}{n+m}}|T^*|^t\right)^{\frac{q+t}{s+t}}$ 在 $s \ge q \ge 0$ 上是单调增加的. 取 $t = 1$, $q = n + p$ 及 $s = n + m$, 则我们有

$$\begin{aligned}
&(|T^*||T^{n+m}|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}}\\
&= \left(|T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+m)}{n+m}}|T^*|\right)^{\frac{n+1+p}{n+1+m}}\\
&= g(n+m) \ge g(n+p)\\
&= \left(|T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+p)}{n+m}}|T^*|\right)^{\frac{n+1+p}{n+1+p}}\\
&= |T^*||T^{n+m}|^{\frac{2(n+p)}{n+m}}|T^*|.
\end{aligned}$$

类似可证第二个不等式.

若 $k = 1, 2$, 则 $p \in (0, 1]$ 或 $(1, 2]$, 故 $r + n \ge r + 1 \ge p$ 及

$$\left(1 + \frac{n}{r}\right)\frac{1+n}{p} \ge \frac{1}{r} + \frac{n}{r}$$

成立. 对 $|T^n|^{\frac{2r}{n}}$ 及 $|T^*|^{2r}$ 应用 Furuta 不等式知

$$|T^n|^{\frac{2p}{n}} = |T^n|^{\frac{2r}{n}\frac{p}{r}} \ge \left(|T^n|^{\frac{2r}{n}\frac{n}{2r}}|T^*|^{2r\frac{1}{r}}|T^n|^{\frac{2r}{n}\frac{n}{2r}}\right)^{\frac{p}{n+1}}$$
$$= (|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}.$$

故

•

$$
\begin{aligned}
|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| &= |T^*||T^n||T^n|^{\frac{2p}{n}}|T^n||T^*| \\
&\geq |T^*||T^n|(|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}|T^n||T^*| \\
&= (|T^*|\ |T^n|^2\ |T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
\end{aligned}
$$

类似可证第二个不等式.

适当修改一下引理 5.6.1 的证明，可得如下结果：

引理 5.6.2 设 $k,n \in \mathbf{N}$, 且 $p \in (k-1,k]$, 若 T 是 p- 亚正常算子，当 $n \geq k$ 时，有

$$
|T^*||T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T^*| \geq (|T^*||T^n|^2|T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}},
$$

$$
|T||T^{n*}|^{\frac{2(n+p)}{n}}|T| \leq (|T||T^{n*}|^2|T|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
$$

证 设 $k \in \mathbf{N}$, $p \in (k-1,k]$, 且 $n \geq k$, 则由定理 5.6.B (当 $n > k$ 时由定理 5.6.B (1); 当 $n = k$ 时由定理 5.6.B (ii)) 及 L-H 不等式得

$$
(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p}{n}}.
$$

现对 $(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} = |T^n|^{\frac{2p}{n}} \geq |T^*|^{2p}$ 应用 Furuta 不等式可得 (因为 $\dfrac{n+1}{p} > 1$, 且 $\left(1+\dfrac{n}{p}\right)\dfrac{n+1}{p} \geq \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{p}$)

$$
\begin{aligned}
|T^n|^{\frac{2p}{n}} &\geq \left(|T^n|^{\frac{2p}{n}\frac{n}{2p}}|T^*|^{2p\frac{1}{p}}|T^n|^{\frac{2p}{n}\frac{n}{2p}}\right)^{\frac{p}{n+1}} \\
&= (|T^n||T^*|^2|T^n|)^{\frac{p}{n+1}}
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
|T^*|\ |T^n|^{\frac{2(p+n)}{n}}\ |T^*| &= |T^*|\ |T^n|\ |T^n|^{\frac{2p}{n}}|T^n|\ |T^*| \\
&\geq |T^*|\ |T^n|\ (|T^n|\ |T^*|^2\ |T^n|)^{\frac{p}{n+1}}\ |T^n|\ |T^*| \\
&= (|T^*|\ |T^n|^2\ |T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}.
\end{aligned}
$$

类似可证另一个不等式.

定理 5.6.2 设 $k,n,m\in\mathbf{N}$, 且 $p\in(k-1,k]$, 若 T 是 p- 亚正常算子, 则

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+r}{n+m}}\geq(T^{n*}T^{n})^{\frac{n+r}{n}},$$

$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+r}{n}}\geq(T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+r}{n+m}},$$

其中 $r=\min\{p,n,m\}$.

为了证明的叙述方便，把这个定理写成下列形式：

定理 5.6.2′ (1) 设 $k\geq1$, $n,m\geq k$, 且 $p\in(k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}}\geq(T^{n*}T^{n})^{\frac{n+p}{n}},\tag{5.6.1}$$

$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+p}{n}}\geq(T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}.\tag{5.6.2}$$

(2) 设 $k\geq2$, $1\leq m<k$, $n\geq m$, 且 $p\in(k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$T^{n+m*}T^{n+m}\geq(T^{n*}T^{n})^{\frac{n+m}{n}},\tag{5.6.3}$$

$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+m}{n}}\geq T^{n+m}T^{n+m*}.\tag{5.6.4}$$

(3) 设 $k\geq2$, $1\leq n<k$, $m\geq n$, 且 $p\in(k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}}\geq(T^{n*}T^{n})^{2},\tag{5.6.5}$$

$$(T^{n}T^{n*})^{2}\geq(T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}.\tag{5.6.6}$$

证 设 $T=U|T|$ 是 T 的极分解, 从而 T^* 的极分解为 $T^*=U^*|T^*|$.

(1) 先证 (5.6.1). 设 $k\geq1$, $n,m\geq k$, 且 $p\in(k-1,k]$. 首先证明当 $n\geq k$ 时，下式成立：

$$(T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}}\geq(T^{n*}T^{n})^{\frac{n+p}{n}}.\tag{5.6.7}$$

首先证明 $n=k$ 时上式成立. 事实上，令 $S=T^k$, 则由定理 5.6.B 知 S 是 $\frac{p}{k}$- 亚正常算子，由定理 5.6.A 知

$$(S^{2*}S^{2})^{\frac{1+\frac{p}{k}}{2}}\geq(S^{*}S)^{1+\frac{p}{k}},$$

即

$$(T^{2k*}T^{2k})^{\frac{k+p}{2k}} \geq (T^{k*}T^k)^{\frac{k+p}{k}}.$$

假设 (5.6.7) 对某 $n \geq k$ 成立，下证它对 $n+1$ 亦成立.

事实上，由引理 5.6.1 、引理 5.6.2 及归纳假设有

$$\begin{aligned}
&(T^{n+k+1*}T^{n+k+1})^{\frac{n+p+1}{n+1+k}} \\
&= (T^*|T^{n+k}|^2T)^{\frac{n+p+1}{n+1+k}} \\
&= U^*(|T^*||T^{n+k}|^2|T^*|)^{\frac{n+p+1}{n+1+k}}U \\
&\geq U^*|T^*||T^{n+k}|^{\frac{2(n+p)}{n+k}}|T^*|U \\
&\geq U^*|T^*|\ |T^n|^{\frac{2(n+p)}{n}}\ |T^*|U \\
&\geq U^*(|T^*|\ |T^n|^2\ |T^*|)^{\frac{n+1+p}{n+1}}U \\
&= (T^{n+1*}T^{n+1})^{\frac{n+p+1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

故它对 $n+1$ 亦成立.

由 (5.6.7) 知， (5.6.1) 当 $m=k$ 时成立. 下面证明当 $m>k$ 时亦成立.

事实上，当 $k=1$ 时，由 (5.6.7) 直接可知结论成立. 当 $k>1$ 时，由 T 是 p- 亚正常算子， $p>k-1\geq 1$, 故 T 是亚正常算子，现对亚正常算子应用 (5.6.7), 并取 $k=p=1$, 又有

$$T^{n+1*}T^{n+1} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+1}{n}}.$$

故

$$\begin{aligned}
T^{n+m*}T^{n+m} &\geq (T^{n+m-1*}T^{n+m-1})^{\frac{n+m}{n+m-1}}, \\
&\cdots, \\
T^{n+k+1*}T^{n+k+1} &\geq (T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+k+1}{n+k}}.
\end{aligned}$$

又

$$(T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{n+p}{n}},$$

故由 L-H 不等式知

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} \geq (T^{n+m-1*}T^{n+m-1})^{\frac{n+p}{n+m-1}} \geq \cdots$$
$$\geq (T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+p}{n}}. \qquad (5.6.8)$$

故 (5.6.1) 成立，类似可证明 (5.6.2).

(2) 设 $k>1$, $1 \leq m < k$, $n \geq m$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则 T 是 m- 亚正常算子，故对每个 $j \in \{1,2,3,\cdots,k-1\}$ 有

$$T^{n+j*}T^{n+j} \geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+j}{n}},$$

$$T^{n+j}T^{n+j*} \leq (T^{n}T^{n*})^{\frac{n+j}{n}}.$$

事实上，只要在 (5.6.1),(5.6.2) 中考虑 $k=p=m$ 时的情形就可以了.

(3) 设 $1 \leq n < k$, $m \geq n$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则 T 是 n- 亚正常算子，故

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}} \geq (T^{n*}T^{n})^{2},$$

$$(T^{n}T^{n*})^{2} \geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}.$$

事实上，只要在 (5.6.1),(5.6.2) 中考虑 $k=p=n$ 时的情形就可以了.

从上述定理的证明过程中可知

推论 5.6.2 (1) 设 $k \geq 1$, $n,m \geq k$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} \geq \cdots \geq (T^{n+k*}T^{n+k})^{\frac{n+p}{n+k}}$$
$$\geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+p}{n}},$$
$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+p}{n}} \geq (T^{n+k}T^{n+k*})^{\frac{n+p}{n+k}} \geq \cdots$$
$$\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}.$$

(2) 设 $1 \leq m < k$, $n \geq m$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$
\begin{aligned}
(T^{2n*}T^{2n})^{\frac{n+m}{2n}} &\geq (T^{2n-1*}T^{2n-1})^{\frac{n+m}{2n-1}} \geq \cdots \\
&\geq T^{n+m*}T^{n+m} \geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+m}{n}}, \\
(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+m}{n}} &\geq T^{n+m}T^{n+m*} \geq \cdots \\
&\geq (T^{2n-1}T^{2n-1*})^{\frac{n+m}{2n-1}} \\
&\geq (T^{2n}T^{2n*})^{\frac{n+m}{2n}}.
\end{aligned}
$$

(3) 设 $1 \leq n < k$, $m \geq n$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$
\begin{aligned}
(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{2n}{n+m}} \geq \cdots \geq T^{n+n*}T^{n+n} &\geq (T^{n*}T^{n})^{2}, \\
(T^{n}T^{n*})^{2} \geq T^{n+n}T^{n+n*} &\geq \cdots \\
&\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{2n}{n+m}}.
\end{aligned}
$$

其中 (3) 的证明，可对 $p=n$ 应用 (5.6.8) 即可.

推论 5.6.3 (1) 设 $n,m \geq 1$, 且 $p \in (0,1]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

$$
\begin{aligned}
(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n+p}{n+m}} &\geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+p}{n}}, \\
(T^{n}T^{n*})^{\frac{n+p}{n}} &\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n+p}{n+m}}.
\end{aligned}
$$

(2) 设 $k,n,m \geq 1$, 且 $p \in (k-1,k]$. 若 T 是 p- 亚正常算子，则

(a) $(T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+\min\{p,m\}}{1+m}} \geq (T^{*}T)^{1+\min\{p,m\}}$,

$$(TT^{*})^{1+\min\{p,m\}} \geq (T^{1+m}T^{1+m*})^{\frac{1+\min\{p,m\}}{1+m}};$$

(b) $(T^{n+1*}T^{n+1})^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n+1}} \geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n}}$,

$$(T^{n}T^{n*})^{n+\min\{p,1\}} \geq (T^{n+1}T^{n+1*})^{\frac{n+\min\{p,1\}}{n+1}}.$$

其中 (2) 的证明如下：

(a) 当 $k=1$ 时，由 (5.6.7) 可得

$$(T^{1+m*}T^{1+m})^{\frac{1+p}{1+m}} \geq (T^{*}T)^{1+p};$$

当 $k \geq 2$ 时, (a) 由定理 5.6.1 (1),(2) 可知.

(b) 当 $k \geq 2$ 时, 由推论 5.6.2 (2), 令 $m=1$, 得

$$T^{n+1*}T^{n+1} \geq (T^{n*}T^{n})^{\frac{n+1}{n}},$$

再由 L-H 不等式可得.

下面介绍 p- 亚正常算子及 log- 亚正常算子指数的最优性估计.

定理 5.6.3 设 k,m,n 为正整数, $p \in (k-1,k]$, $\alpha > 1$, 则

(1) 当 $m \geq p$ 时,

(a) 存在 p- 亚正常算子 T 使得

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{(n+p)\alpha}{n+m}} \ngeq (T^{n*}T^{n})^{\frac{(n+p)\alpha}{n}};$$

(b) 存在 p- 亚正常算子 T 使得

$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{(n+p)\alpha}{n}} \ngeq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{(n+p)\alpha}{n+m}};$$

(2) 当 $m < p$ 时,

(a) 存在 p- 亚正常算子 T 使得

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\alpha} \ngeq (T^{n*}T^{n})^{\frac{(n+m)\alpha}{n}};$$

(b) 存在 p- 亚正常算子 T 使得

$$(T^{n}T^{n*})^{\frac{(n+m)\alpha}{n}} \ngeq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\alpha}.$$

为了证明这一结果, 需要下列引理:

引理 5.6.B 设 $\delta > 0$, $p > 0$, $r > 0$ 及 $q > 0$. 如果 $0 < q < 1$ 或 $(\delta + r)q < p + r$, 则

(1) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B, 使得 $A^{\delta} \geq B^{\delta}$, 但有

$$(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \ngeq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B, 使得 $A^{\delta} \geq B^{\delta}$, 且有

$$A^{\frac{p+r}{q}} \ngeq (A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}.$$

引理 5.6.C 设 $p>0$, $r>0$ 及 $q>0$. 如果 $rq<p+r$, 则

(1) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B, 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \not\geq B^{\frac{p+r}{q}};$$

(2) 存在 $\mathbf{R}^2$ 上的正可逆算子 A,B, 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$A^{\frac{p+r}{q}} \not\geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}.$$

引理 5.6.3 对 H 上的正算子 A,B, 定义 $\bigoplus\limits_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 为

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 & & & & & \\ & B^{\frac{1}{2}} & (0) & & & & \\ & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & & & \\ & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & & \\ & & & & A^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 (,) 表示矩阵的 $(0,0)$ 位置, 则对 $\beta>0$ 及 $n\in\mathbf{N}$, 有

(1) T 是 p- 亚正常算子 $(p>0)$ 当且仅当

$$A^p \geq B^p;$$

(2) T 是对数 - 亚正常算子当且仅当 A,B 是可逆算子且

$$\log A \geq \log B;$$

(3) $(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{\beta}{n+m}} \geq (T^{n*}T^n)^{\frac{\beta}{n}}$ 当且仅当

$$\left(B^{\frac{l}{2}}A^{n+m-l}B^{\frac{l}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}} \geq \left(B^{\frac{l}{2}}A^{n-l}B^{\frac{l}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n}}, \quad l=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\left(B^{\frac{l}{2}}A^{n+m-l}B^{\frac{l}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}} \geq B^{\beta}, \quad l=n,n+1,\cdots,n+m-1;$$

(4) $(T^nT^{n*})^{\frac{\beta}{n}} \geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{\beta}{n+m}}$ 当且仅当

$$\left(A^{\frac{j}{2}}B^{n-j}A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n}} \geq \left(A^{\frac{j}{2}}B^{n+m-j}A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}}, \quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$A^{\beta} \geq \left(A^{\frac{j}{2}}B^{n+m-j}A^{\frac{j}{2}}\right)^{\frac{\beta}{n+m}}, \quad j=n,n+1,\cdots,n+m-1.$$

证 通过计算表明

$$T^*T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & B & & & & & \\ & & B & & & & \\ & & & (A) & & & \\ & & & & A & & \\ & & & & & A & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

及

$$TT^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & B & & & & & \\ & & B & & & & \\ & & & (B) & & & \\ & & & & A & & \\ & & & & & A & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

故 (1),(2) 易得，只需比较 T^*T 与 TT^* 位置上的元素即可.

另一方面，当 $n \geq 2$ 时，可求得 T^n 是一个仅在第 n 个次对角线上取不为零的元素

$$\left(\cdots, B^{\frac{n}{2}}, B^{\frac{n}{2}}, A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{n-1}{2}}, \cdots, A^{\frac{n-1}{2}}B^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{n}{2}}, A^{\frac{n}{2}}, \cdots\right),$$

其中第一个 $A^{\frac{n}{2}}$ 在第 0 列，故

$T^{n*}T^n =$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & B^n & & & & & & \\ & & B^{\frac{n-1}{2}}AB^{\frac{n-1}{2}} & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & B^{\frac{1}{2}}A^{n-1}B^{\frac{1}{2}} & & & \\ & & & & & (A^n) & & \\ & & & & & & A^n & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

比较一下 $T^{n+m*}T^{n+m}$ 与 $T^{n*}T^n$ 相应位置上的元素可证得 (3).

又

$T^{n*}T^n =$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & B^n & & & & & & \\ & & (B^n) & & & & & \\ & & & A^{\frac{1}{2}}B^{n-1}A^{\frac{1}{2}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & A^{\frac{n-1}{2}}BA^{\frac{n-1}{2}} & & \\ & & & & & & A^n & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

从而比较一下 T^nT^{n*} 与 $T^{n+m}T^{n+m*}$ 相应位置上的元素可证得 (4).

下面证明定理 5.6.3.

定理 5.6.3 的证明　令

$$p_1 = m > 0, \quad r_1 = n > 0, \quad q_1 = \frac{n+m}{(n+p_0)\alpha},$$

其中 $p_0 = \min\{p, m\}$ 及 $\delta = p > 0$, 则当 $m < p$ 时有 $q_1 < 1$；或 $m \geq p$ 时有

$$(\delta + r_1)q_1 = (n+p)\frac{n+m}{(n+p_0)\alpha} < n+m = p_1 + r_1.$$

由引理 5.6.B (1), 存在 $H=\mathbf{R}^2$ 上的可逆正算子 A,B, 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 但有

$$\left(B^{\frac{r_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \not\geq B^{\frac{p_1+r_1}{q_1}},$$

即 $A^p \geq B^p$ 且

$$\left(B^{\frac{n}{2}}A^m B^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}} \not\geq B^{(n+p_0)\alpha}.$$

现定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示，则 T 是 p- 亚正常算子 $(p>0)$, 但由引理 5.6.3 (3) 知

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}} \not\geq (T^{n*}T^n)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n}}.$$

因为引理 5.6.3 (3) 中式子对 $l=n$, $\beta=(n+p_0)\alpha$ 时不成立，故定理 5.6.3 中 (1) (a), (2) (a) 均成立.

再由引理 5.6.B (2), 存在 H 上可逆算子 A,B, 使得 $A^\delta \geq B^\delta$, 但有

$$A^{\frac{p_1+r_1}{q_1}} \not\geq \left(A^{\frac{r_1}{2}}B^{p_1}A^{\frac{r_1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

即 $A^p \geq B^p$ 且

$$A^{(n+p_0)\alpha} \not\geq \left(A^{\frac{n}{2}}B^m A^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}}.$$

定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示，则 T 是 p- 亚正常算子 $(p>0)$, 但由引理 5.6.3 (4) 知

$$(T^nT^{n*})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n}} \not\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{(n+p_0)\alpha}{n+m}}.$$

从而定理 5.6.3 中 (1) (b), (2) (b) 亦成立.

仿照上面的证明，有如下的关于对数 - 亚正常算子的结论:

定理 5.6.4 设 $m,n\in\mathbf{N}$, $\alpha>1$, 则

(1) *存在一个对数 - 亚正常算子 T, 使得*

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq (T^{n*}T^n)^{\alpha};$$

(2) 存在一个对数 - 亚正常算子 T, 使得

$$(T^nT^{n*})^\alpha \not\geq (T^{n+m}T^{n+m*})^{\frac{n\alpha}{n+m}}.$$

证 令

$$p_1 = m > 0, \quad r_1 = n > 0, \quad q_1 = \frac{n+m}{n\alpha},$$

则 $r_1q_1 < p_1 + r_1$. 由引理 5.6.C (1), 存在 $H = \mathbf{R}^2$ 上的可逆正算子 A, B, 使得 $\log A \geq \log B$, 且

$$\left(B^{\frac{n}{2}}A^mB^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq B^{n\alpha}.$$

再定义 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H$ 上的一个算子 T 如引理 5.6.3 所示，则由引理 5.6.3 (2) 知 T 是对数 - 亚正常算子，但是

$$(T^{n+m*}T^{n+m})^{\frac{n\alpha}{n+m}} \not\geq (T^nT^{n*})^\alpha,$$

故定理 5.6.4 中 (1) 成立. 类似可证 (2) 亦成立.

索　引

参考文献

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307-315.

[2] A. Aluthge, *Some generalized theorems on p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **24** (1990), 497-501.

[3] A. Aluthge and D. Wang, *Powers of p-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **3** (1999), 279-284.

[4] A. Aluthge and D. Wang, *w-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **36** (2000), 1-10.

[5] A. Aluthge and D. Wang, *w-hyponormal operators II*, Integr. Equat. Oper. Th., **37** (2000), 324-331.

[6] A. Aluthge and D. Wang, *An operator inequality which implies Paranormality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 113-119.

[7] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **33** (1972), 169-178.

[8] T. Ando, *On some operator inequalities*, Math Ann., **279** (1987), 157-159.

[9] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197-198** (1994), 113-131.

[10] B. A. Barnes, *Common operator properties of the linear operators RS and SR*, Proc. Amer. Math. Soc., **126**(1998), 1055-1061.

[11] E. Bach and T. Furuta, *Counterexample to a question on the operator equation* $T(H^{1/n}T)^n = K$, Linear Algebra Appl., **177** (1992), 157-162.

[12] N. N. Chan and M. K. Kong, *Hermitian matrix inequalities and a conjecture*, Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 533-541.

[13] M. Chō and T. Huruya, *Square of w-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **39** (2001), 413-420.

[14] M. Chō, T. Huruya and M. Itoh, *Spectra of completely log-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **37(1)** (2001), 413-420.

[15] M. Chō, T. Huruya and Y. O. Kim, *A note on w-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **7(1)**(2002), 1-10.

[16] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123 (8)** (1995), 2435-2440.

[17] M. Chō and Y. Nagano, *Simple proof of the p-hyponormality of the Aluthge transformation*, Integr. Equat. Oper. Th., **33** (1999), 248-251.

[18] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., World Publishing Corporation, Beijing, 2003.

[19] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 413-415.

[20] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, 2nd ed., World Publishing Corporation, Beijing, 2003.

[21] J. I. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto, *Normal inequality equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **118(3)** (1993), 827-830.

[22] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Oper. Th., **23** (1990), 67-72.

[23] M. Fujii, T. Furuta and D. Wang, *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic order*, Math. Japonica, **40** (1994), 317-321.

[24] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655-3658.

[25] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta's type operator inequalities* , Linear Multilinear Algebra, **43** (1998), 339-349.

[26] M. Fujii and E. Kamei, *Mean theoretic approach to grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751-2756.

[27] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161-169.

[28] M. Fujii and T. Furuta, *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math Japonica, **38** (1993), 73-78.

[29] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality*, Proc. Japan Acad. Ser. A **70** (1994), 239-242.

[30] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, III*, Math. Japon., **45** (1997), 25-32.

[31] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, IV*, Math. Japon., **45** (1997), 511-518.

[32] M. Fujii, D. Jung, S. H. Lee, M. Y. Lee and R. Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and* log-*hyponormal* operators, Math. Japon., **51** (2000), 395-402.

[33] M. Fujii and R. Nakamoto, *Some classes of operators derived from Furuta inequality*, Sci. Math., **3** (2000), 87-94.

[34] T. Furuta, *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich type operator inequalities*, J. Inequal. Appl., **3** (1998), 137-148.

[35] T. Furuta, *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **74** (1998), 114.

[36] T. Furuta, *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3071-3075.

[37] T. Furuta, *The Hölder-McCarthy and Young inequalities are equivalent for Hilbert space operators* , Amer. Math. Monthly, **108(1)** (2001), 68-69.

[38] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85-88.

[39] T. Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequalities*, Proc. Japan Acad. Ser. A., **65** (1989), 126.

[40] T. Furuta, *Two operator functions with monotone property*, Proc. Amer. Math. Soc., **111(1)** (1991), 511-516.

[41] T. Furuta, *An extension of Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 785-787.

[42] T. Furuta, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161-169.

[43] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai* log-*majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139-155.

[44] T. Furuta, *Normal inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Mathematical Physics., **1(1)** (1989), 135-137.

[45] T. Furuta, *Results under* $\log A \geq \log B$ *can be derived from ones under* $A \geq B \geq 0$ *by Uchiyama's methond associaced with Furuta and Kantonvich type operator inequalities* , Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 423-436.

[46] T. Furuta, *The operator equation* $T(H^{1/n}T)^n = K$, Linear Algebra Appl., **109** (1988), 149-152.

[47] T. Furuta, *Parallelism related to the inequality* " $A \geq B \geq 0$ *ensures* $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ ", Math. Japon., **45(2)** (1997), 203-209.

[48] T. Furuta, *Determinant type generalizations of the Heinz-Kato theorem via Furuta inequality* , Proc. Amer. Math. Soc., **120(1)** (1994), 223-231.

[49] T. Furuta, *Parametric operator function via Furuta inequality*, Sci. Math., **1 (1)** (1998), 1-5.

[50] T. Furuta, *Invitation to Linear Operators — From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space*, Taylor & Francis, London, 2001.

[51] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of* log-*hyponormal and several classes*, Sci. Math., **1** (1998), 389-403.

[52] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Operator functions implying generalized Furuta inequality* , Math. Inequal. Appl., **1** (1998), 123-130.

[53] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Equivalence relations among Furuta-type inequalities with negative powers*, Sci. Math. **1** (1998), 223-229.

[54] T. Furuta, T. Yamazaki and M. Yanagida, *On a conjecture related Furuta-type inequalities with negative powers*, Nihonkai Math. J. **9** (1998), 213-218.

[55] T. Furuta and M. Yanagida, *Further extensions of Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **36** (1997), 122-125.

[56] T. Furuta and M. Yanagida, *On powers of p-hyponormal and log-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **5** (2000), 367-380.

[57] T. Furuta and D. Wang, *A decreasing operator function associated with the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2427-2432.

[58] T. Furuta and Y. Seo, *An application of generalized Furuta inequality to Kantorovich type inequalities*, Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 393-399.

[59] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

[60] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spetralzerlegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415-438.

[61] F. Hensen, *An operator inequality* , Math. Ann., **246** (1980), 249-250.

[62] F. Hensen and G. K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner theorem*, Math. Ann., **258** (1982), 229-241.

[63] T. Huruya, *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617-3624.

[64] M. Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Math., **35** (1999), 149-165.

[65] M. Ito, *On some classes of operators by Fujii and Nakamoto related to p-hyponormal and paranormal operators*, Sci. Math., **3** (2000), 319-334.

[66] M. Ito, *Generalizations of the results on powers of p-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **6** (2000), 1-15

[67] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two inequalities* $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ *and* $(A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}} \leq A^p$ *and its applications*, Integr. Equat. Oper. Th., **44** (2002), 442-450.

[68] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33** (1988), 883-886.

[69] E. Kamei, *Complements to the Furuta inequality, II*, Math. Japon., **45** (1997), 15-23.

[70] T. Kato, *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125** (1952), 208-212.

[71] T. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 883-886.

[72] 李国平，蹇明．算子函数论．武汉：武汉大学出版社， 1997.

[73] 刘培德．泛函分析基础．武汉：武汉大学出版社， 2002.

[74] K. Löwner, *Über monotone matrixfunktionen*, Math. Z., **38** (1934), 177-216.

[75] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36 (1)** (1972), 309-310.

[76] S. M. Pale, *A note on p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **21** (1995), 498-503.

[77] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[78] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators*, Pacific J. Math., **12** (1962), 1453-1458.

[79] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators and spectral density*, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 469-476.

[80] K. Tanahashi, *Best possibility of Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141-146.

[81] K. Tanahashi, *The best possibility for the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (1999), 511-519.

[82] K. Tanahashi, *The Furuta inequality with negative powers*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** **(6)** (1999), 1683-1692.

[83] K. Tanahashi, *On* log-*hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **34** (1999), 364-372.

[84] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **33** (1999), 221-230.

[85] M. Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469-471.

[86] M. Uchiyama, *An operator inequality related to Jensen's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** **(11)** (2001), 3339-3344.

[87] M. Uchiyama, *Further extension of the Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** **(10)** (1999), 2899-2904.

[88] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *On the Riesz idempotent of class A operators*, Math. Inequal. Appl., **5** **(2)** (2002), 291-298.

[89] 夏道行. 线性算子谱理论 (*I* - 亚正常算子与半亚正常算子). 北京: 科学出版社, 1983.

[90] T. Yamazaki, *Extensions of the results on p-hyponormal and log-hyponormal operators by Aluthge and Wang*, SUT J. Math., **35** (1999), 139-148.

[91] T. Yamazaki, *On powers of class $A(k)$ operators including p-hyponormal and log-hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 97-104.

[92] T. Yamazaki, *Parallelism between Aluthge transformation and powers of operators*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **67** (2001), 809-820.

[93] T. Yamazaki, *Characterizations of $\log A \geq \log B$ and normaloid operators via Heinz inequality*, Integr. Equat. Oper. Th., **43** (2002), 237-247.

[94] T. Yamazaki and M. Yanagida, *A characterization of log-hyponormal operators via p-paranormality*, Sci. Math., **3** (2000), 19-21.

[95] T. Yamazaki and M. Yanagida, *A further generalization of paranormal operators*, Sci. Math., **3** (2000), 23-31.

[96] M. Yanagida, *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 297-305.

[97] M. Yanagida, *Powers of class $wA(s,t)$ operators associated with generalized Aluthge transformation*, J. Inequal. Appl., **7(2)** (2002), 143-168.

[98] C. Yang, *An order preserving inequality via Furuta inequality,II* Linear Algebra Appl., **331** (2001), 89-100.

[99] C. Yang, *An order preserving inequality via Furuta inequality*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54 (2)** (2001), 241-247.

[100] C. Yang, *On the strong extreme points of the set $N_0(\Delta)$*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **54 (2)** (2001), 235-239.

[101] 杨长森. 正算子平均的不等式. 数学杂志, **16 (4)** (1996), 467-474.

[102] C. Yang, *On the Critical points of the map $F_p : X \to \|AXB - C\|_p^p$*, Applied Mathematics and Mechanics, **21 (4)** (2000), 485-488.

[103] C. Yang, *Powers of an invertible w-hyponormal operator*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, **19 (3)** (2004), 288-292.

[104] C. Yang, Q. Guo and J. Zhao, *A class of power bounded generalized shift*, Acta. Math. Sci., **20(3)** (2000), 423-432.

[105] 杨长森，户清文，左红亮．具有负指数的 Furuta 型不等式的推广．数学物理学报， **25(1)** (2005), 21-26.

[106] 杨长森，李海英．关于 p-w-亚正常算子的一个注记．数学学报，**49(1)** (2006), 19-28.

[107] C. Yang and H. Li, *Powers of an invertible p-w-hyponormal operator*, Acta. Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 363-370.

[108] C. Yang and J. Yuan, *Extensions of the results on powers of p-hyponormal and* log-*hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., (2006), Article ID36919, 1-14.

[109] C. Yang and J. Yuan, *Spectrum of class* $wF(p,r,q)$ *operators for* $p+r \leq 1$ *and* $q \geq 1$, Acta. Sci. Math. (Szeged), **71** (2005), 767-779.

[110] C. Yang and F. Gao, *A characterization of chaotic order* , J. Inequal. Appl., 2006, Article ID79123, 1-6.

[111] C. Yang and J. Yuan, *Class* $wF(p,q,r)$ *operators*, Acta Math. Sci. Ser. A, **27(5)** (2007), 769-780.

[112] C. Yang, H. Zuo. 函数 $F(\alpha) = (A^r B^\alpha A^r)^{\frac{p+2r}{\alpha+2r}}$ 的最优单调区间．数学学报， **47(1)** (2004), 79-86.

[113] C. Yang and H. Zuo, *A monotone function via Furuta-type inequality with negative powers*, Math. Inequal. Appl., **6(2)** (2003), 303-308.

[114] J. Yuan and C. Yang, *Classes of operators associated with Furuta inequality and Aluthge transformation*, **7(1)** (2006), Article 32, 1-9.

[115] T. Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transformation*, Interdiscip. Inform. Sci., **3** (1997), 91-93.

[116] T. Yoshino, *Introduction to operator theory* , Pitman Research Notes in Math. Ser., **300**, Longman Scientific and Technical, New York, 1993.